EXAME DE ACESSO PROFMAT – 2016 – SOLUÇÕES

1. Um canavial tem a forma de um quadrado com 90 metros de lado e um trabalhador consegue ceifá-lo em 9 dias. Sabendo que o tempo gasto pelo trabalhador para ceifar o canavial é proporcional à sua área, qual é a medida do lado, em metros, de um outro canavial quadrado, que o mesmo trabalhador conseguiria ceifar em 4 dias?

   (A) 30 (B) 40 (C) 50

   (D) 60 (E) 70

   Resposta: D

   Uma solução:

   Como o número de dias necessários para a ceifa é proporcional à área do canavial, e a área do quadrado de 90 metros de lado é igual a 8100 m^2, em um dia ele consegue ceifar $\frac{8100}{9}$ =900 m^2.

   Em 4 dias ele ceifará $4 \times 900 = 3600$ m^2, que é a área de um quadrado de lado medindo 60 metros.

2. Quantos são os números inteiros não negativos k para os quais a equação $x^2 + 6x + k = 0$ tem soluções inteiras?

   (A) 2 (B) 3 (C) 4

   (D) 5 (E) 6

   Resposta: C

   Uma solução:

   Temos que, a equação $x^2 + 6x + k = 0$ é equivalente à equação $(x + 3)^2 = 9 - k$. Como as raízes devem ser inteiras e $k \geqslant 0$, as possibilidades são $9 - k = 0, 1, 4$ e 9, donde $k = 9, 8, 5$ e 0.

   Portanto, temos 4 valores possíveis para k.

3. Se o dia 31 de março de um certo ano ocorreu numa quarta-feira, então 15 de outubro do mesmo ano foi numa

   (A) segunda-feira (B) terça-feira

   (C) quarta-feira (D) quinta-feira

   (E) sexta-feira

Resposta: E

Uma solução:

Entre 1º de abril e 15 de outubro (inclusos), passaram-se 198 dias. Iniciando-se na quinta-feira (1º de abril), ao final de cada grupo de 7 dias, o sétimo dia sempre foi uma quarta-feira.

Como $198 = 7 \times 28 + 2$ vemos que, ao final de $7 \times 28 = 196$ dias, isto é, 13 de outubro foi numa quarta-feira. Assim o dia 15 de outubro foi numa sexta-feira.

4. Um triângulo equilátero e um quadrado estão inscritos na mesma circunferência. Sabendo que o quadrado tem área 9 cm^2, qual a área, em cm^2, do triângulo equilátero?

(A) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$ (C) $27\sqrt{3}$

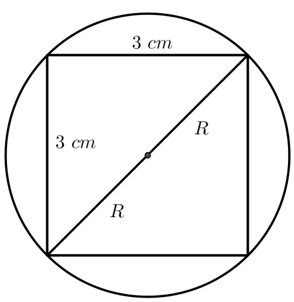
(D) $\dfrac{27\sqrt{3}}{8}$ (E) $27\sqrt{6}$

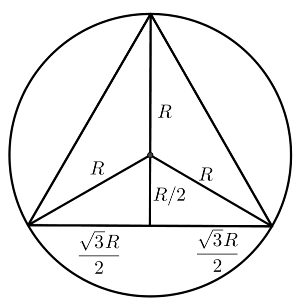
Resposta: D

Uma solução:

Um quadrado de área 9 cm^2 tem 3 cm de lado. Visto que a diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm, o raio da circunferência circunscrita ao quadrado é $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Observando as medidas do triângulo equilátero na figura, concluímos que a área do triângulo equilátero é igual a

$$A = \frac{\sqrt{3}R}{2} \times \frac{3R}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{8}.$$





5. De quantas maneiras distintas podemos colocar, em cada espaço abaixo, os algarismos $2, 3, 4, 7, 8, 9$, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfaçam as duas duas desigualdades?

$$\_\ \_ < \_\ \_ < \_\ \_$$

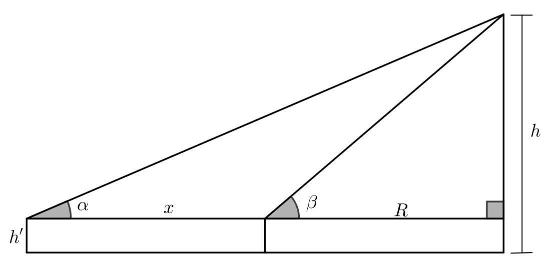
(A) 20 (B) 26 (C) 60 (D) 120 (E) 720

Resposta: D

Uma solução:

Como os algarismos são distintos temos que $\underline{a}\ \underline{b} < \underline{c}\ \underline{d} < \underline{e}\ \underline{f} \Longleftrightarrow a < c < e$. Escolhendo 3 algarismos do conjunto $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ temos um único modo de ordená-los em ordem crescente, assim teremos $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ modos para a escolha de a, c e e. Para cada escolha de a, c e e teremos $3!$ modos de escolher b, d e f. Portanto, temos um total de $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120$ maneiras para colocar os algarismos.

6. Um topógrafo com o objetivo de determinar a altura h de uma torre do outro lado de um rio de largura constante R passando por uma região totalmente plana, procedeu da seguinte maneira: Foi até a margem do rio e mediu o ângulo β entre a horizontal e o topo da torre. Em seguida, afastou-se x metros da margem do rio e fez outra medição de um ângulo α.



Sabendo que o teodolito tem altura h', a altura h da torre e a largura R do rio são:

(A) $h = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$ e $R = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$

(B) $h = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$ e $R = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$

(C) $h = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$ e $R = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$

(D) $h = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$ e $R = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$

(E) $h = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$ e $R = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}$

Resposta: B

Uma solução:

Temos que $\text{tg } \beta = \dfrac{h - h'}{R}$ e $\text{tg } \alpha = \dfrac{h - h'}{x + R}$ e assim

$h - h' = (x + R)\text{tg } \alpha = \left(x + \dfrac{h - h'}{\text{tg } \beta}\right) \text{tg } \alpha = x\text{tg } \alpha + \dfrac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta}(h - h')$, isto é,

$h - h' = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha} \Rightarrow h = h' + \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$ e $R = \dfrac{h - h'}{\text{tg } \beta} = \dfrac{x \cdot \text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$.

7. A soma das soluções inteiras da inequação $\dfrac{(2x-14)^2}{(x-1)(x-5)} \leqslant 0$ é igual a:

(A) 7 (B) 9 (C) 15 (D) 16 (E) 22

Resposta: D

Uma solução:

A expressão não está definida apenas para $x = 1$ e $x = 5$. O numerador se anula quando $x = 7$ e é positivo para $x \neq 7$. Assim, nesse último caso, o sinal do quociente será o mesmo do denominador, que é negativo para $1 < x < 5$. Portanto, as soluções inteiras são: 2, 3, 4 e 7, cuja soma é 16.

8. Sejam $A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \cdots \times \dfrac{2015}{2016}$, $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{7} \times \cdots \times \dfrac{2014}{2015}$ e $C = \dfrac{1}{2016}$.

É correto afirmar que

(A) $A < B < C$ (B) $A < C < B$ (C) $B < A < C$

(D) $B < C < A$ (E) $C < A < B$

Resposta: E

Uma solução:

Observe que todos os fatores de A e de B são do tipo $\dfrac{k}{k+1} < 1$. Logo A e B são menores que 1.

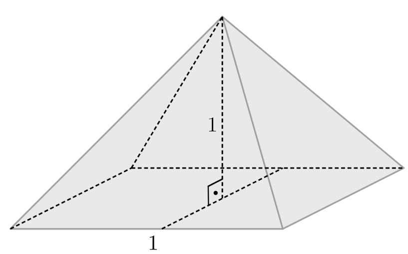
Além disso, $A \times B = \dfrac{1}{2016} = C$ e assim $C < A$ e $C < B$. A única alternativa onde isso ocorre é a E.

Também é possível mostrar que $B > A$.

Para isso, note que $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{5} > \dfrac{3}{4}$, $\cdots$, $\dfrac{2014}{2015} > \dfrac{2013}{2014}$, $1 > \dfrac{2015}{2016}$.

Multiplicando membro a membro obtemos $B > A$.

9. Considere uma pirâmide regular com base quadrada de lado 1 e altura também 1, como mostra a figura abaixo.



A área de uma face triangular dessa pirâmide é igual a:

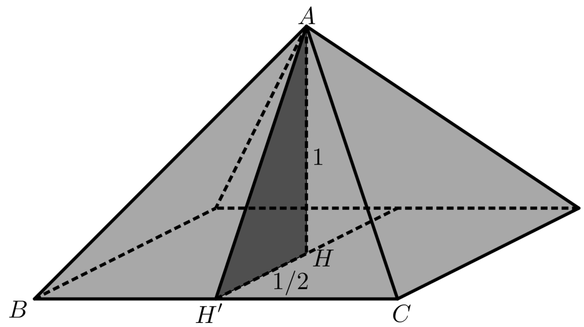
(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Resposta: C

Uma solução:

Considere a figura abaixo:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHH', vemos que $\overline{AH'} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Desta forma, como $\overline{BC} = 1$, a área de uma das faces é $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

10. Em uma urna há 8 bolas vermelhas e 5 brancas, indistinguíveis, exceto pela cor. Retiramos três bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. A probabilidade de que sejam retiradas duas bolas brancas e uma bola vermelha, nesta ordem, é igual a:

(A) $\dfrac{70}{169}$ (B) $\dfrac{40}{429}$ (C) $\dfrac{32}{429}$

(D) $\dfrac{16}{169}$ (E) $\dfrac{12}{169}$

Resposta: B

Uma solução:

Primeiramente, vamos descrever o espaço amostral. Temos as seguintes possibilidades, em relação à cor, na retirada de três bolas: todas vermelhas (vvv), duas vermelhas e uma branca (vvb, vbv ou bvv), uma vermelha e duas brancas (vbb, bvb ou bbv) ou todas brancas (bbb). Fazendo a contagem , temos $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ modos de saírem 3 vermelhas. No caso de 2 vermelhas e uma branca temos um total de $(8 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 3 = 840$, pois levamos em consideração a ordem de saída vvb, vbv e bvv.

De modo análogo, no caso de duas bolas brancas e uma vermelha temos que $(8 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 3 = 480$.

Finalmente, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos de sairem 3 brancas. Logo, nosso espaço amostral tem $336 + 840 + 480 + 60 = 1716$ elementos. O número de casos favoráveis para a saída bbv, nesta ordem, é igual a $5 \cdot 4 \cdot 8 = 160$. Portanto, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas e uma branca, nesta ordem, é igual a $\dfrac{160}{1716} = \dfrac{40}{429}$.

11. Seja $I_n = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, para n inteiro positivo. Quantas funções $f : I_7 \to I_{10}$ satisfazendo $f(1) = 9$ e $f(3) = 10$ são injetivas, ou seja, funções em que elementos distintos de I_7 têm imagens distintas em I_{10}?

(A) 120 (B) 280 (C) 1260

(D) 5040 (E) 6720

Resposta: E

Uma solução:

Como $f(1) = 9$ e $f(3) = 10$, para definir uma função $f : I_7 \to I_{10}$ basta dizer quais os valores de $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ e $f(7)$. Como a função deve ser injetiva temos oito possibilidades de escolha para $f(2)$, sete para $f(4)$, seis para $f(5)$, cinco para $f(6)$ e quatro para $f(7)$. Ou seja, existem $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ funções injetivas com as propriedades impostas.

12. O conjunto de todos os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\cos x = \dfrac{3t+2}{4t-3}$ admite soluções reais é:

(A) $\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t > \dfrac{3}{4}\right\}$

(B) $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 5\}$

(C) $\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t \leqslant \dfrac{1}{7} \text{ ou } t > \dfrac{3}{4}\right\}$

(D) $\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t \leqslant \dfrac{1}{7} \text{ ou } t \geqslant 5\right\}$

(E) $\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{1}{7} \leqslant t \leqslant 5 \text{ e } t \neq \dfrac{3}{4}\right\}$

Resposta: D

Uma solução:

Devemos ter $-1 \leqslant \dfrac{3t+2}{4t-3} \leqslant 1$ e $t \neq \dfrac{3}{4}$. Para analisar a desigualdade vamos separar nos casos $t > \dfrac{3}{4}$ e $t < \dfrac{3}{4}$. No primeiro caso, temos que $4t - 3 > 0$ e, portanto $3 - 4t \leqslant 3t + 2 \leqslant 4t - 3$. Analisando a primeira desigualdade temos $t \geqslant \dfrac{1}{7}$, enquanto que a segunda nos dá $t \geqslant 5$. Desta forma, temos $t \geqslant 5$. No segundo caso, temos $4t - 3 < 0$, o que implica $4t - 3 \leqslant 3t + 2 \leqslant 3 - 4t$, o que nos dá $t \leqslant 5$ e $t \leqslant \dfrac{1}{7}$, respectivamente. Desta forma segue que $t \leqslant \dfrac{1}{7}$.

Portanto combinando os dois casos, temos que $t \in \left(-\infty, \dfrac{1}{7}\right] \cup [5, \infty)$.

13. Considere as afirmações abaixo:

(I) Se $(x-3)(x-2) = (x-2)$, então $x = 2$.

(II) Se $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, então $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.

(III) Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $\dfrac{x-1}{x+1} > 1$.

É correto afirmar que:

(A) Apenas (I) é falsa.

(B) Apenas (I) e (II) são falsas.

(C) Apenas (I) é verdadeira.

(D) Apenas (I) e (III) são falsas.

(E) Todas são verdadeiras.

Resposta: A

Uma solução:

(I) Falsa. A equação $(x-3)(x-2) = (x-2)$ é equivalente a $x^2 - 6x + 8 = 0$, o que implica $x = 2$ ou $x = 4$.

(II) Verdadeira. A equação $x(x^2 - 2x + 1) = 0$ é equivalente a $x(x-1)^2 = 0$, o que implica $x = 0$ ou $x = 1$. Mas é logicamente correto afirmar que $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.

(III) Verdadeira. Tome $x = -2$.

14. Em um teste de 30 questões de múltipla escolha, cada acerto acrescenta 3 pontos e cada erro desconta 1 ponto da nota do aluno. Antônio respondeu a todas as questões, correta ou incorretamente, e obteve 62 pontos. Indicando por x o número de acertos, podemos afirmar que:

(A) $x < 18$ (B) $17 < x < 20$ (C) $19 < x < 23$

(D) $22 < x < 25$ (E) $x > 24$

Resposta: D

Uma solução:

Temos que $3x + (-1)(30 - x) = 62$ e assim $4x = 62 + 30 = 92$. Portanto $x = 23$.

15. Seja x um número real tal que $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 1$. O valor absoluto da expressão $x^2 - x - 1$ é igual a:

(A) 0 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$

(D) 2 (E) $\sqrt{5}$

Resposta: B

Uma solução:

Elevando a expressão $x^2 - x - 1$ ao quadrado, temos que $(x^2 - x - 1)^2 = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Usando o fato que $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 1$ obtemos $(x^2 - x - 1)^2 = 2$ e assim segue que $|x^2 - x - 1| = \sqrt{2}$.

16. Uma rede varejista anunciou publicamente, na última *black friday*, um desconto de 50% em todos os seus produtos. Pouco antes de aplicar o desconto, porém, aumentou todos os seus preços em 30%. Considerando o preço anterior ao aumento e ao desconto, e o preço final anunciado na promoção, o desconto real foi de

(A) 20% (B) 30% (C) 35%

(D) 40% (E) 45%

Resposta: C

Uma solução:

Chamemos de P o preço inicial do produto. Após um aumento de 30%, o preço do produto será $P_a = P + 30\%\, P = 130\%\, P$. Aplicando um desconto de 50% sobre este preço, teremos o preço final P_f, dado por $P_f = P_a - 50\%\, P_a = 50\%\, P_a = 50\%.130\%\, P = 65\%\, P$.

Assim, o desconto real foi de 35% sobre o preço inicial P do produto.

17. A turma A tem 48 alunos e a turma B tem 32. As duas turmas fizeram uma prova e a média aritmética das notas dos alunos da turma A foi de 5,7 e dos alunos da turma B foi de 6,5. Qual é a média aritmética das notas de todos os 80 alunos?

(A) 6,02 (B) 6,06 (C) 6,1

(D) 6,14 (E) 6,18

Resposta: A

Uma solução:

Se M_A e M_B são as médias aritméticas das notas dos alunos das turmas A e B, respectivamente, temos que $M_A = \dfrac{n_1 + \cdots + n_{48}}{48} = 5,7$ e $M_B = \dfrac{m_1 + \cdots + m_{32}}{32} = 6,5$.

A média aritmética M de todos os alunos é dada por $M = \dfrac{n_1 + \cdots + n_{48} + m_1 + \cdots + m_{32}}{80}$.

Portanto, $M = \dfrac{5,7 \cdot 48 + 6,5 \cdot 32}{80} = \dfrac{5,7 \cdot 6 + 6,5 \cdot 4}{10} = \dfrac{34,2 + 26,0}{10} = 6,02$.

18. Em quantos algarismos zero termina o número 61!, representado no sistema decimal?

(A) 6 (B) 12 (C) 14

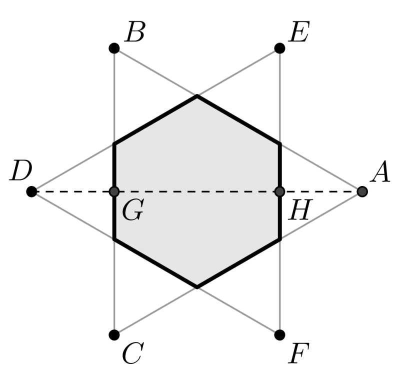
(D) 30 (E) 56

Resposta: C

Uma solução:

O total de zeros pedido é o expoente do fator 5 na fatoração em números primos de $61! = 61 \times 60 \times \cdots \times 2 \times 1$; ou seja, $\left\lfloor \dfrac{61}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{61}{25} \right\rfloor = 14$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x.

19. Na figura abaixo, os segmentos AG e DH são alturas dos triângulos equiláteros ABC e DEF, cujos lados têm medida ℓ. Sabe-se ainda que os pontos A, D, G e H são colineares e que o hexágono destacado na figura é regular.



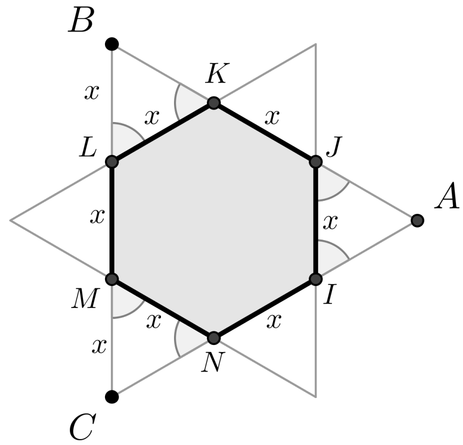
A área do hexágono regular destacado acima é igual a:

(A) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

(D) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{6}$ (E) $3\ell^2\sqrt{3}$

Resposta: D

Uma solução:



Na figura acima, os ângulos destacados são ângulos externos do hexágono regular, logo medem $60°$. Com isso, os triângulos IJA, KLB e MNC são equiláteros. Os lados destes triângulos terão medida x igual ao lado do hexágono regular, logo $\ell = \overline{BL} + \overline{LM} + \overline{MC} = 3x$, o que nos dá $x = \dfrac{\ell}{3}$.

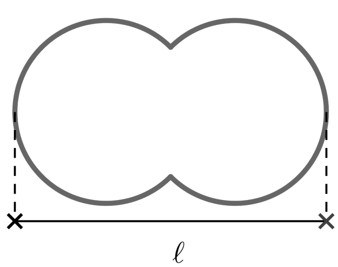
A área do hexágono $IJKLMN$ será então

Área(IJKLMN) = Área(ABC) - Área(IJA) - Área(KLB) - Área(MNC)=

$$= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\ell^2\sqrt{3}}{36} = \frac{9\ell^2\sqrt{3}}{36} - 3\frac{\ell^2\sqrt{3}}{36} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{36} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{6}\ .$$

20. Dois arcos metálicos circulares idênticos, correspondentes cada um a $3/4$ de uma circunferência completa de raio 1 metro, são unidos por suas extremidades de maneira a formar a figura plana abaixo.



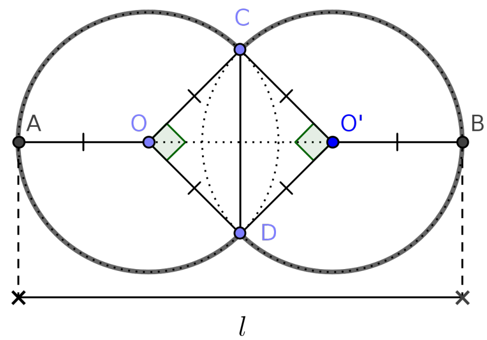
Supondo desprezível a espessura do arco, o valor da largura máxima ℓ, representada na figura, em metros, é igual a:

(A) $2 + \sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 3

(D) 4 (E) $\sqrt{2}$

Resposta: A

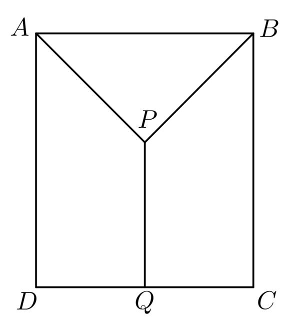
Uma solução:



Tracemos o segmento AB (que contém os diâmetros dos dois círculos) e os raios OC, OD, $O'C$ e $O'D$, conforme figura abaixo. Como os arcos CD de ambas as circunferências correspondem a $1/4$ de cada uma, os ângulos centrais $C\hat{O}D$ e $C\hat{O}'D$ terão medida igual a $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$.

Pelos dados do problema, os raios AO e BO' medem 1 metro cada. Os triângulos OCD e $O'CD$ são, ambos, isósceles, logo seus ângulos não destacados na figura medem 45°. Com isso, $OCO'D$ é um quadrado cujos lados medem 1 metro (pois são raios) do círculo, logo, o segmento OO' mede $\sqrt{2}$ metros. Assim, a medida de AB será $(1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2})$ metros.

21. Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo onde $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 12$. Sabe-se que o segmento PQ é paralelo a BC, Q é ponto médio de CD, $\overline{AP} = x$ e $\overline{PQ} = x + 4$.



Qual é o perímetro do triângulo ABP?

(A) 15 (B) 18 (C) 21

(D) 24 (E) 27

Resposta: B

Uma solução:

Como Q é ponto médio de CD e PQ é paralelo a BC, então o segmento PQ pertence à mediatriz do segmento AB. Disso conclui-se que:

(i) P é equidistante de A e B, ou seja, $\overline{BP} = \overline{AP} = x$;

(ii) Sendo M ponto médio de AB, PM é perpendicular a BM, com $\overline{PM} = \overline{QM} - \overline{PQ} = \overline{BC} - \overline{PQ} = 12 - (x-4) = 8 - x$ e $\overline{BM} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BMP, retângulo em M, tem-se:

$\overline{BP}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{BM}^2$, ou seja, $x^2 = (8-x)^2 + 4^2$, donde conclui-se que $x = 5$.

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é $2x + 8 = 18$.

22. Um ônibus percorre um trecho de estrada, saindo às 10h30min e viaja a uma velocidade constante de 65 km/h. Um carro faz o mesmo percurso, viajando 10 km/h mais rápido, porém saindo 10 minutos após o ônibus. A que horas o carro começa a ultrapassar o ônibus? (Despreze os comprimentos dos veículos.)

(A) 10h45min (B) 11h45min (C) 11h55min

(D) 12h (E) 12h05min

Resposta: B

Uma solução:

A posição do ônibus é descrita pela função linear $s = 65t$ onde t é dado em horas. Como o carro saiu 10 minutos mais tarde ($\frac{1}{6}$ de uma hora), a sua posição será proporcional a $t - \frac{1}{6}$, portanto sua posição será dada por $s = 75\left(t - \frac{1}{6}\right)$.

Igualando as posições temos que $65t = 75\left(t - \frac{1}{6}\right)$, ou seja, $t = \frac{75}{60}$ horas $=$ 1 hora e 15 minutos.

Portanto a ultrapassagem ocorrerá às 11h45min.

23. As bases de um trapézio isósceles têm medidas a e b, com $a < b$, e os lados não paralelos medem, cada um, c. Se h é a altura deste trapézio, é correto afirmar que h é igual a:

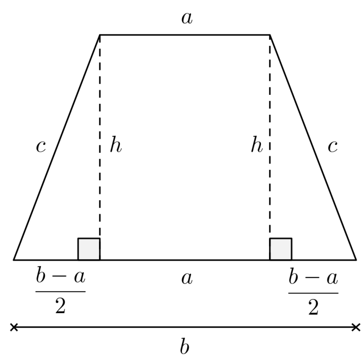
(A) $\sqrt{c^2-a^2-b^2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{4c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}$

(C) $\dfrac{\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}$

(E) $\dfrac{\sqrt{4c^2+a^2+b^2-2ab}}{2}$

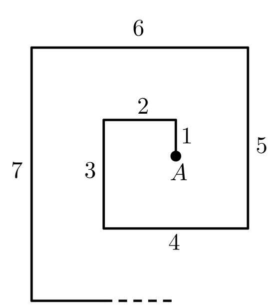
Resposta: B

Uma solução:



As projeções ortogonais sobre as bases dos lados não paralelos medem, juntas, $b-a$, logo, como o trapézio é isósceles, cada uma medirá $\dfrac{b-a}{2}$ (veja a figura). Assim, temos o triângulo retângulo de hipotenusa c, e catetos h e $\dfrac{b-a}{2}$, logo $c^2=\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2+h^2$, que implica $h^2=c^2-\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$. Portanto, $h^2=\dfrac{4c^2-(b-a)^2}{4}$, e assim, $h=\sqrt{\dfrac{4c^2-(b^2-2ab+a^2)}{4}}=\dfrac{\sqrt{4c^2-a^2-b^2+2ab}}{2}$.

24. Florinda foi dar um passeio. Ela saiu do ponto A e caminhou 1 metro para a frente. Depois, virou 90° à sua esquerda e caminhou 2 metros para a frente. Virou novamente 90° à sua esquerda e caminhou mais 3 metros em frente. Ela continuou caminhando desta forma, andando sempre um metro a mais em cada trecho adicional e virando 90° à sua esquerda ao final deste trecho. No último trecho do percurso, ela caminhou 30 metros e chegou ao seu ponto final, que chamaremos de B. A figura seguinte ilustra os sete primeiros trechos do passeio (note que o ponto B não está ilustrado).



A distância, em metros, entre os pontos A e B é igual a:

(A) 21 (B) 22 (C) $\sqrt{580}$

(D) $\sqrt{481}$ (E) $\sqrt{613}$

Resposta: D

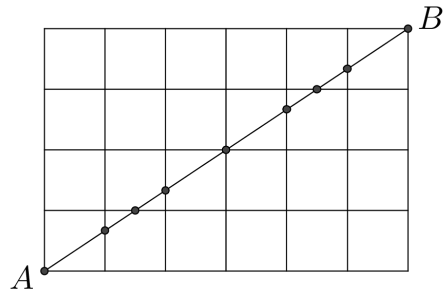
Uma solução:

Consideramos o ponto $A = (0, 0)$. Utilizando a figura como referência, partindo do ponto A, ela fez um deslocamento vertical de 1 metro para cima, um deslocamento horizontal de 2 metros para a esquerda, um deslocamento vertical de 3m para baixo, um deslocamento horizontal de 4m para a direita, chegando a um ponto $A_1 = (-2+4, 1-3) = (2, -2)$. Chamaremos este trajeto de A até A_1 de primeira etapa. Na segunda etapa, partindo de $A_1 = (-2, -2)$ ela chegará, caminhando 5m para cima, 6m para a esquerda, 7m para baixo e 8m para a direita, ao ponto $A_2 = (2-6+8, -2+5-7) = (4, -4)$, e assim por diante. Assim, podemos analisar o deslocamento de Florinda o dividindo em "etapas"de 4 trechos. Ao final de cada etapa, ela terá se deslocado $(2, -2)$. Nos 28 primeiros trechos do passeio, teremos 7 etapas de 4 trechos cada uma, e os pontos finais de cada um dessas etapas serão

$A_1 = (2, -2)$, $A_2 = (4, -4), \ldots, A_7 = (14, -14)$. Observando que $30 = 4 \cdot 7 + 2$, teremos, a partir de A_7, um deslocamento vertical de 29m para cima e outro horizontal de 30m para a esquerda, chegando ao ponto $B = (14 - 30, -14 + 29) = (-16, 15)$.

Portanto, a distância entre os pontos A e B é igual a $\sqrt{(-16)^2 + 15^2} = \sqrt{481}$.

25. Em uma folha de papel foi desenhado um quadriculado de 6×4 e depois foi traçada a diagonal de A a B como mostra a figura abaixo. Observe que a diagonal AB intersecta o quadriculado em 9 pontos, incluindo os vértices A e B.



Se desenharmos um quadriculado de tamanho 2016×1344, o número de pontos que a diagonal AB intersectará o quadriculado, incluindo os vértices, será igual a:

(A) 1680 (B) 2688 (C) 2689

(D) 3360 (E) 3362

Resposta: C

Uma solução:

Observe que $2016 = 6 \times 336$ e $1344 = 4 \times 336$. Dessa forma o quadriculado de tamanho 2016×1344 contém exatamente 336 quadriculados como o da figura na base e 336 quadriculados do mesmo na altura. Isso implica que a diagonal do quadriculado em questão contém exatamente 336 cópias da diagonal da figura. Para evitar contar duas vezes o vértice superior, vamos considerar que há 8 interseções da diagonal com o quadriculado 6×4. Isto implica 8×336 interseções. Contando com o último vértice superior da diagonal, temos $8 \times 336 + 1 = 2689$.

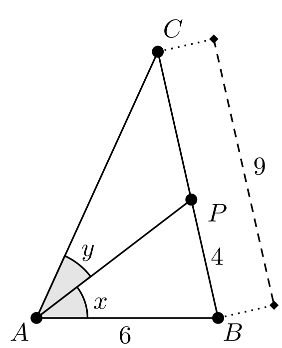
26. ABC é um triângulo tal que $\overline{AB} = 6$ e $\overline{BC} = 9$. Seja P sobre o lado BC com $\overline{BP} = 4$. Sabendo que $P\hat{A}B = x$ e $P\hat{A}C = y$, a medida do ângulo $B\hat{P}A$ é igual a:

(A) $x + y$ (B) $x - y$ (C) $2x - y$

(D) $2x + y$ (E) $x + 2y$

Resposta: A

Uma solução:



Observe que $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$ e que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, logo $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}}$.

Com isso, os triângulos BCA e BAP serão semelhantes, com $B\hat{C}A = B\hat{A}P = x$.

Como $B\hat{P}A$ é ângulo externo do triângulo APC, temos que

$$B\hat{P}A = P\hat{A}C + P\hat{C}A = P\hat{A}C + B\hat{C}A = y + x.$$

27. Acrescentando-se 3 novos elementos ao conjunto A, obtemos o conjunto B com precisamente 224 subconjuntos a mais do que A. O número de elementos de A é igual a:

(A) 5 (B) 6 (C) 7

(D) 8 (E) 9

Resposta: A

Uma solução:

Seja n o número de elementos do conjunto A. Segue que o número de subconjuntos de A é igual a 2^n e como o conjunto B tem $n+3$ elementos, o número de subconjuntos de B é igual a 2^{n+3}.

Pelos dados do problema, temos que $2^{n+3} = 2^n + 224$. Resolvendo esta equação obtemos

$2^{n+3} = 2^n + 224 \Leftrightarrow 2^n \cdot 2^3 = 2^n + 224 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^n = 224 \Leftrightarrow 2^n = 32 \Leftrightarrow n = 5.$

Portanto, o número de elementos de A é igual a 5.

28. Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meio-campistas e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio-campistas e 2 atacantes?

(A) 58 (B) 232 (C) 1392

(D) 1575 (E) 6300

Resposta: E

Uma solução:

Para a escolha do goleiro temos duas opções, dos zagueiros temos $C_6^4 = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{5\cdot 6}{2} = 15$ opções, dos meios-campistas $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$ e finalmente, para a escolha dos atacantes temos $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{3\cdot 4}{2} = 6$ opções.

Portanto, temos um total de $2\cdot 15\cdot 35\cdot 6 = 6300$ modos de escalar a seleção.

29. Sabendo que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = a$, o valor de $\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x$ é igual a:

(A) 1 (B) $1 - 4a^4$ (C) $1 - 4a^2 + 6a^4$

(D) $1 + 4a^2 + 2a^4$ (E) $1 - 4a^2 + 2a^4$

Resposta: E

Uma solução:

Como $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, temos que $1 = (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)^2 = \cos^4 x + \text{sen}^4 x + 2\cos^2 x\,\text{sen}^2 x =$ $\cos^4 x + \text{sen}^4 x + 2a^2$, ou seja, $\cos^4 x + \text{sen}^4\, x = 1 - 2a^2$. Elevando novamente ao quadrado, segue que $(1-2a^2)^2 = (\cos^4 x + \text{sen}^4\, x)^2 = \cos^8 x + \text{sen}^8 x + 2\cos^4 x\,\text{sen}^4 x = \cos^8 x + \text{sen}^8 x + 2a^4$, isto é, $\cos^8 x + \text{sen}^8 x = (1-2a^2)^2 - 2a^4 = 1 - 4a^2 + 2a^4$.

30. Numa pesquisa constatou-se que 75% das pessoas gostam de café, 80% gostam de suco e 77% gostam de refrigerante. As porcentagens mínima e máxima de pessoas que gostam simultaneamente de café, suco e refrigerante são, respectivamente,

(A) 32% e 75% (B) 25% e 75% (C) 32% e 80%

(D) 25% e 80% (E) 32% e 77%

Resposta: A

Uma solução:

Sejam C, S e R os conjuntos formados pelas pessoas que gostam de café, suco e refrigerante, respectivamente. Estamos interessados em estimar o número de elementos da interseção dos três conjuntos, isto é, $n(C \cap S \cap R)$. O número de pessoas que gostam das três bebidas, é igual ao complementar do número de pessoas que não gostam de pelo menos uma bebida, isto é,

$n(C \cap S \cap R) = 100\% - n(C^c \cup S^c \cup R^c)$.

Como 25% não gostam de café, 20% não gostam de suco e 23% não gostam de refrigerante, temos que $n(C^c \cup S^c \cup R^c)$ é no máximo igual à soma dos três números, ou seja, 68% e no mínimo igual a 25% (que é o caso quando $C \subset R \subset S$).

Sendo assim, $n(C \cap S \cap R)$ é, no mínimo, 32% e no máximo 75%.

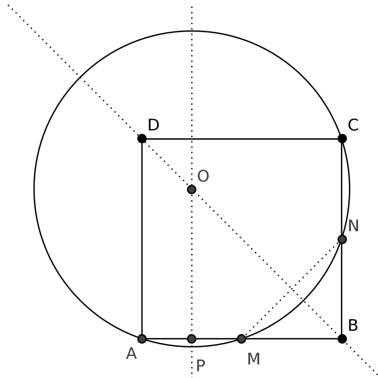
31. Os lados do quadrado $ABCD$ medem 4 unidades de comprimento. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. A área do círculo determinado pelos pontos A, M e N é igual a:

(A) 4π (B) 6π (C) 8π

(D) 10π (E) 12π

Resposta: D

Uma solução:



Como MN é uma corda do círculo $\mathcal{H}$, a mediatriz deste segmento conterá um diâmetro. Mas a mediatriz de MN contém a diagonal BD do quadrado, logo o centro da circunferência está sobre esta diagonal. Da mesma forma, AM é também uma corda do círculo, logo, a mediatriz deste segmento intersecta a diagonal BD em um ponto O de BD de forma que, sendo P o ponto médio de AM, PO é paralelo ao lado AD. Repare que, como O está na mediatriz de duas cordas, será o centro do círculo.

Mas $\overline{AP}$ é um quarto da medida do lado do quadrado, logo $\overline{AP} = 1$ e, então, $\overline{BP} = 3$.

Assim, $\dfrac{\overline{PO}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$, e, portanto, $\overline{PO} = 3$. Sendo $r = \overline{OA}$ o raio da circunferência, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que $r^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PO}^2 = 1^2 + 3^2$, logo $r = \sqrt{10}$.

Portanto a área limitada pelo círculo $\mathcal{H}$ mede $\pi r^2 = \pi\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10\pi$.

32. Um aluno utilizou a fórmula resolvente $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau na forma $ax^2+bx+c = 0$. No entanto por engano, trocou a por c no denominador da fórmula. Se as demais operações aritméticas foram realizadas corretamente, então sobre as raízes encontradas por engano, é correto afirmar que

(A) o produto ficou igual ao produto correto multiplicado por $\dfrac{a^2}{c^2}$

(B) o produto ficou igual ao produto correto multiplicado por $\dfrac{a^2}{c}$

(C) o produto não se alterou em relação ao produto correto

(D) a soma ficou igual à soma correta multiplicada por $-\dfrac{b}{c}$

(E) a soma ficou igual à soma correta multiplicada por $-\dfrac{a}{b}$

Resposta: A

Uma solução:

Sejam S e P a soma e o produto das raízes antes da troca, S_t e P_t a soma e o produto das raízes, após a troca. Logo, $S = -\dfrac{b}{a}$, $P = \dfrac{c}{a}$, $S_t = -\dfrac{b}{c}$ e $P_t = \dfrac{a}{c}$.

Portanto $\dfrac{S_t}{S} = \dfrac{a}{c}$ e $\dfrac{P_t}{P} = \dfrac{a^2}{c^2}$.

33. Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco homens e cinco mulheres, a porcentagem de homens na festa passou a ser de 26%. Depois disso, qual a quantidade de pessoas na festa?

(A) 45 (B) 50 (C) 55

(D) 60 (E) 65

Resposta: B

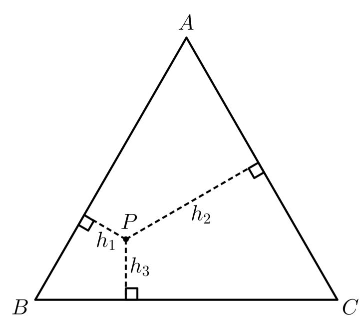
Uma solução:

Sejam m e h o número inicial de mulheres e homens, respectivamente. Por hipótese

$$\begin{cases} m = 4h \\ h + 5 = \dfrac{26}{100}\,(h + 5 + m + 5) \end{cases}.$$

Substituindo $m = 4h$ na segunda equação temos, $100(h + 5) = 26(5h + 10)$. Assim concluímos que $h = 8$ e $m = 32$. Após a chegada dos cinco homens e das 5 mulheres, teremos $h + 5 = 13$ homens e $m + 5 = 37$ mulheres e, portanto, 50 pessoas na festa.

34. Considere um triângulo equilátero ABC e P um ponto interior do triângulo tal que $h_1 + h_2 + h_3 = 6$, onde h_1, h_2 e h_3 são as distâncias de P aos lados AB, AC e BC, respectivamente.



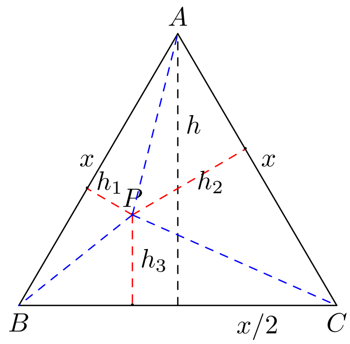
Qual é a área do triângulo ABC?

(A) $4\sqrt{3}$ (B) $9\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$

(D) $24\sqrt{3}$ (E) $36\sqrt{3}$

Resposta: C

Uma solução:



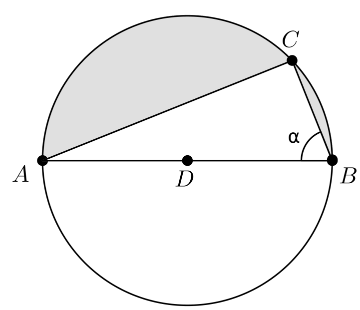
Observamos que a área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos PAB, PAC e PBC.

Assim $\dfrac{xh}{2} = \dfrac{xh_1}{2} + \dfrac{xh_2}{2} + \dfrac{xh_3}{2}$, onde x é o lado do triângulo ABC e h a sua altura. Segue que

$h = h_1 + h_2 + h_3 = 6$. Agora no triângulo ABC temos que $x^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ e daí obtemos $x = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$.

Portanto, a área do triângulo ABC é igual a $\dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2} = 12\sqrt{3}$.

35. Em uma circunferência de raio r inscreve-se um triângulo ABC de modo que o lado AB é um diâmetro da circunferência, conforme a figura abaixo.



Se $A\hat{B}C = \alpha$, pode-se afirmar que área sombreada na figura acima é dada pela expressão

(A) $\dfrac{r^2}{2}\,(2\pi - \cos\alpha)$

(B) $\dfrac{r^2}{2}\,(\pi - \operatorname{sen}\alpha)$

(C) $\dfrac{r^2}{2}\,(\pi - 4\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha)$

(D) $r^2\,(\pi - \operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha)$

(E) $\dfrac{r^2}{2}\,(\pi + 4\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha)$

Resposta: C

Uma solução:

Inicialmente, repare que o triângulo ABC é retângulo com $\hat{C} = 90°$, pois o lado AB é um diâmetro.

A área cinzenta é metade da área da circunferência, subtraindo a área do triângulo retângulo, isto é,

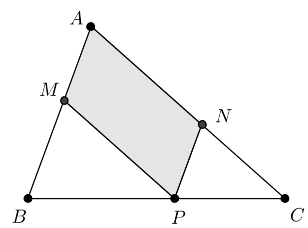
$A_{\text{cinzenta}} = \dfrac{1}{2}A_{\text{círculo}} - A_{ABC} = \dfrac{\pi r^2}{2} - \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}$, visto que o triângulo é retângulo.

Por outro lado, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{2r}$, logo $\overline{AC} = 2r\operatorname{sen}\alpha$. Além disso, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{2r}$, e, portanto, $\overline{BC} = 2r\cos\alpha$.

Logo, temos que $A_{\text{cinzenta}} = \dfrac{\pi r^2}{2} - \dfrac{2r\,\operatorname{sen}\alpha \cdot 2r\cos\alpha}{2}$ e, simplificando a expressão,

$$A_{\text{cinzenta}} = \frac{r^2}{2}\left(\pi - 4\,\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha\right).$$

36. O ponto P é marcado sobre o lado BC de um triângulo ABC, e, a partir dele, são traçados os segmentos PM e PN, paralelos aos lados AC e AB respectivamente, com $M \in AB$ e $N \in AC$.



Sabendo que $\overline{BC} = 4$ e que a área do paralelogramo $AMPN$ é igual a $\dfrac{3}{8}$ da área do triângulo ABC, o maior valor possível para a medida de BP é igual a:

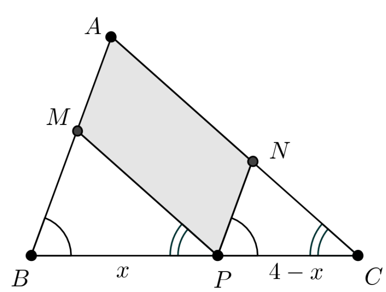
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2

(D) $\sqrt{6}$ (E) 3

Resposta: E

Uma solução:

Para simplificar a escrita, denotemos por x a medida de BP. Como PM é paralelo a AC, os ângulos $M\hat{P}B$ e $A\hat{C}B$ serão congruentes e, Como PN é paralelo a AB, serão também congruentes os ângulos $N\hat{P}C$ e $A\hat{B}C$. Com isso, os triângulos ABC, MBP e NPC serão semelhantes.



A razão entre as áreas de MBP e ABC é o quadrado da razão de semelhança dos triângulos, isto é,

$$\frac{\text{Área}(MBP)}{\text{Área}(ABC)} = \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2,$$

logo, $\text{Área}(MBP) = \dfrac{x^2 \cdot \text{Área}(ABC)}{16}$.

Da mesma forma, $\dfrac{\text{Área}(NPC)}{\text{Área}(ABC)} = \left(\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\right)^2 = \left(\dfrac{4-x}{4}\right)^2$ e, portanto, $\text{Área}(NPC) = \dfrac{(4-x)^2 \cdot \text{Área}(ABC)}{16}$.

Assim, a área do paralelogramo $AMPN$ é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Área}(AMPN) &= \text{Área}(ABC) - \text{Área}(MBP) - \text{Área}(NPC)\\
&= \text{Área}(ABC) - \frac{x^2 \cdot \text{Área}(ABC)}{16} - \frac{(4-x)^2 \cdot \text{Área}(ABC)}{16}\\
&= \frac{16 - x^2 - (4-x)^2}{16} \cdot \text{Área}(ABC)\\
&= \frac{16 - x^2 - (x^2 - 8x + 16)}{16} \cdot \text{Área}(ABC)\\
&= \frac{-2x^2 + 8x}{16} \cdot \text{Área}(ABC)\\
&= \frac{-x^2 + 4x}{8} \cdot \text{Área}(ABC)
\end{aligned}$$

Mas, como queremos que $\text{Área}(AMPN) = \dfrac{3}{8}\text{Área}(ABC)$, temos que $\dfrac{-x^2+4x}{8} = \dfrac{3}{8}$,

logo $-x^2 + 4x = 3$, que implica $x^2 - 4x + 3 = 0$ e assim $x = 1$ ou $x = 3$.

Portanto, 3 é o maior valor possível.

37. Um médico solicita ao seu assistente que meça a pressão arterial de 8 pacientes. Ao finalizar a tarefa, o assistente calcula a pressão arterial média (aritmética) e encontra o valor de $13,875$.

Paciente	A	B	C	D	E	F	G	H
Pressão Arterial	11,5	16,0	14,0	15,2	14,0	12,1	?	13,2

Quando o médico vai consultar a tabela encontra um valor ilegível. Sobre o número ilegível é correto afirmar que este valor, em relação aos dados, é:

(A) igual à moda.

(B) inferior ao primeiro quartil.

(C) inferior à média aritmética das observações.

(D) igual ao valor máximo das observações.

(E) superior à mediana.

Resposta: E

Uma solução:

Inicialmente, determina-se o valor ilegível através da expressão da média aritmética:

$$\frac{11,5 + 16,0 + 14,0 + 15,2 + 14,0 + 12,1 + x + 13,2}{8} = 13,875.$$

Logo $x + 96 = 111$, ou seja, $x = 15$. Analisando os dados, temos que a moda é igual a 14.

Colocando os dados em ordem crescente, obtemos o seguinte conjunto de valores:

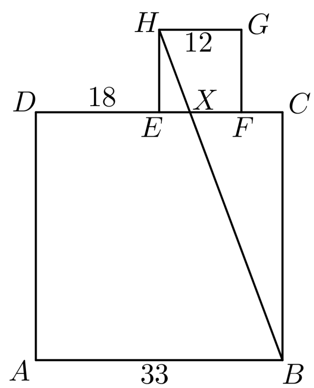
$\{11,5;\ 12,1;\ 13,2;\ 14,0;\ 14,0;\ 15,0;\ 15,2;\ 16,0\}$.

Como a quantidade de valores é par, segue que a mediana é igual a $Q_2 = \dfrac{a_4 + a_5}{2} = \dfrac{14+14}{2} = 14$.

Além disso, o primeiro quartil é $Q_1 = \dfrac{a_2 + a_3}{2} = \dfrac{12,1 + 13,2}{2} = 12,65$.

Portanto, como $Q_2 < 15$, temos que este valor é superior à mediana.

38. Sejam $ABCD$ e $EFGH$ quadrados de lados 33 e 12, com EF sobre o lado DC. Seja X o ponto de interseção dos segmentos HB e DC, como mostrado na figura abaixo.



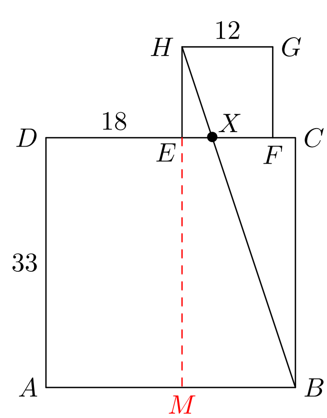
Se $\overline{DE} = 18$, então $\overline{EX}$ é igual a:

(A) 3 (B) $3,5$ (C) 4

(D) $3\sqrt{2}$ (E) 5

Resposta: C

Uma solução:



Considere o ponto M sobre o segmento AB tal que HM é o prolongamento do segmento HE. Temos que os triângulos HEX e HMB são semelhantes.

Assim obtemos $\dfrac{\overline{HE}}{\overline{HM}} = \dfrac{\overline{EX}}{\overline{MB}}$, ou seja, $\dfrac{12}{12+33} = \dfrac{\overline{EX}}{33-18}$, logo $\dfrac{12}{45} = \dfrac{\overline{EX}}{15}$.

Portanto, $\overline{EX} = 4$.

39. Um apostador participará de um jogo com sorteios diários. No primeiro dia, sua probabilidade de ganhar é igual a $\dfrac{1}{2}$, no segundo dia é $\dfrac{1}{3}$ e assim por diante, de forma que no n-ésimo dia a probabilidade de vitória seja $\dfrac{1}{n+1}$. A probabilidade de que ele não tenha ganho até o fim do 2015º dia é igual a:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2000}$

(D) $\dfrac{1}{2015}$ (E) $\dfrac{1}{2016}$

Resposta: E

Uma solução:

Para que o apostador não tenha ganho até o terceiro dia, é necessário que ele tenha perdido no primeiro, no segundo e no terceiro dia. A probabilidade de que ganhe no primeiro dia é $\dfrac{1}{2}$, assim a probabilidade de que tenha perdido no primeiro dia é $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. A probabilidade de que o apostador ganhe no segundo dia é $\dfrac{1}{3}$ e então a probabilidade de que tenha perdido no segundo dia é $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. A probabilidade de que ganhe no terceiro dia é $\dfrac{1}{4}$. Logo, a probabilidade dele perder no terceiro dia é $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Portanto, a probabilidade de que o apostador tenha perdido no primeiro, segundo e terceiro dia é igual ao produto dessas probabilidades, que nos dá $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$. Pensando indutivamente, a probabilidade de que o apostador não tenha ganho até o 2015° dia é igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2014}{2015}\cdot\frac{2015}{2016} = \frac{1}{2016}$$

.

40. Um canal tem duas barragens, B_1 e B_2 dispostas em paralelo, transversalmente ao rio, que podem estar abertas ou fechadas e que funcionam independentes uma da outra. Quando uma das barragens está fechada a passagem de água pelo canal fica completamente interrompida. Sabendo que a probabilidade de que a barragem B_1 ou B_2 esteja fechada em um determinado dia é, respectivamente, de 10% e 5%, qual a probabilidade de o fluxo de água estar interrompido neste dia?

(A) 10% (B) $14,5\%$ (C) 15%

(D) 25% (E) $25,5\%$

Resposta: B

Uma solução:

Sejam $P(B_1)$ e $P(B_2)$ as probabilidades de as barragens B_1 e B_2 estarem fechadas, respectivamente.

O fluxo de água no canal é interrompido quando pelo menos uma das barragens está fechada.

A probabilidade de pelo menos uma barragem estar fechada é $P(B_1 \cup B_2)$. Visto que os eventos são independentes, temos

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2) \\ &= 0,1 + 0,05 - 0,1 \cdot 0,05 = 0,145 \end{aligned}$$

Portanto $P(B_1 \cup B_2) = 14,5\%$.

Solução Alternativa

Um outro modo de raciocinar é pela probabilidade do complementar, isto é, a probabilidade de o fluxo de água não ter sido interrompido. A água está fluindo apenas quando as duas barragens estão abertas. Se P_1 e P_2 são as probabilidades de as barragens B_1 e B_2 estarem abertas, respectivamente, então $P_1 = 1 - P(B_1) = 0,9$ e $P_2 = 1 - P(B_2) = 0,95$. Desta forma, a probabilidade de B_1 e B_2 estarem abertas simultaneamente é (visto que são eventos independentes)

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855.$$

Assim a probabilidade de o fluxo de água estar interrompido é igual a $1 - P = 1 - 0,855 = 0,145$, isto é, $14,5\%$.