Questão 01 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

Determine **TODOS** os valores possíveis para os algarismos x, y, z e t de modo que os números abaixo, representados na base 10, tenham a propriedade mencionada:

(a) $3x90586y$ é divisível por 60.

(b) $72z41t$ é divisível por 99.

Solução

(a) $3x90586y$ é divisível por $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ se, e somente se, é divisível simultaneamente por 4, 3 e 5.

i) $3x90586y$ é divisível por 5 se, e somente se, $y = 0$ ou $y = 5$.

ii) $3x90586y$ é divisível por 4 se, e somente se, $6y$ é divisível por 4. Pelo item anterior, $y = 0$, pois 65 não é divisível por 4.

iii) $3x905860$ é divisível por 3 se, e somente se, $3 + x + 9 + 0 + 5 + 8 + 6 + 0 = 31 + x$ é divisível por 3. Os possíveis valores para x são: 2, 5, 8.

Resposta: 32905860, 35905860 ou 38905860.

b) $72z41t$ é divisível por $99 = 9 \cdot 11$ se, e somente se, é divisível simultaneamente por 9 e 11.

i) $72z41t$ é divisível por 9 se, e somente se, $7+2+z+4+1+t = 14+z+t$ é divisível por 9. Então $z+t = 4$ ou $z+t = 13$.

ii) $72z41t$ é divisível por 11 se, e somente se, $t - 1 + 4 - z + 2 - 7 = t - z - 2$ é divisível por 11. Então $t - z = -9$ ou $t - z = 2$.

Primeiro caso: $\begin{cases} z + t = 4 \\ t - z = -9 \end{cases}$, sem solução inteira.

Segundo caso: $\begin{cases} z + t = 4 \\ t - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1$ e $t = 3$.

Terceiro caso: $\begin{cases} z + t = 13 \\ t - z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow z = 11$ e $t = 2$.

Quarto caso: $\begin{cases} z + t = 13 \\ t - z = 2 \end{cases}$, sem solução inteira.

Resposta: 721413

Pauta de Correção:

Item (a)

- Verificar os critérios de divisibilidade por 3, 4 e 5 na conclusão de que um número é divisível por 60 ou mostrar que os números achados pelos critérios usados são efetivamente divisíveis por 60. $[0, 25]$
- Determinar corretamente os valores de x e y. $[0, 25]$

Item (b)

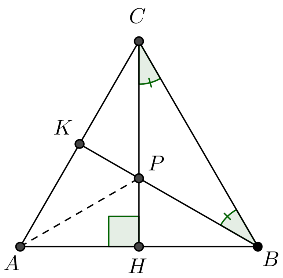
- Verificar os critérios de divisibilidade por 9 e 11 na conclusão de que um número é divisível por 99. $[0,25]$
- Determinar corretamente os valores de z e t. $[0,25]$

Questão 02 [**1,00**]

A altura CH e a mediana BK são traçadas em um triângulo acutângulo ABC.
Sabendo que $BK \equiv CH$ e $K\hat{B}C = H\hat{C}B$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

Solução

Na figura abaixo, denotamos por P o ponto de interseção entre BK e CH.



Nos triângulos KBC e HCB, temos $KB \equiv HC$, $K\hat{B}C = H\hat{C}B$ e $BC \equiv CB$, logo, pelo caso LAL, estes triângulos são congruentes. Assim, $C\hat{K}B = B\hat{H}C = 90°$, logo a mediana BK é também altura, mostrando que o triângulo ABC é isósceles, com $AB \equiv BC$. Da congruência entre os triângulos KBC e HCB, concluímos também que $BH \equiv CK$.

Como BPC é isósceles, temos $CP \equiv BP$ e, consequentemente, $PK \equiv PH$. Com isso, os triângulos retângulos AHP e AKP possuem mesma hipotenusa e catetos PH e PK congruentes, logo estes triângulos são congruentes. Com isso, $AH \equiv AK$. E, como $BH \equiv CK$, isto implica que $AB \equiv AC$.

Como já concluímos que $AB \equiv BC$, temos então $AB \equiv BC \equiv AC$.

Solução alternativa para mostrar que $AB \equiv AC$ sem usar o segmento AP

Os triângulos AHC e AKB são congruentes, pois são retângulos com ângulos retos nos vértices H e K, o ângulo $C\hat{A}H = B\hat{A}K$ é comum e os catetos opostos $CH \equiv BK$ são iguais. Logo $AB \equiv AC$ e assim $AB \equiv BC \equiv AC$.

Pauta de correção:

- Concluir que BK é uma altura, a partir da congruência dos triângulos KBC e HBC, ou argumento equivalente. [0,25]
- Concluir que $AB \equiv BC$, a partir do fato de a mediana BK ser também altura ou equivalente. [0,25]
- Concluir que $AH \equiv AK$ a partir da congruência dos triângulos AHP e AKP (ou mostrar que os triângulos AHC e AKB são congruentes). [0,25]
- Concluir que $AB \equiv AC$. [0,25]

Pauta de correção alternativa:

- Concluir que BK é uma altura, a partir da congruência dos triângulos KBC e HBC, ou argumento equivalente. [0,25]
- Concluir que $AB \equiv BC$, a partir do fato de a mediana BK ser também altura ou equivalente. [0,25]
- Concluir que $AB \equiv AC$ sem usar o segmento AP. [0,5]

Questão 03 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

(a) Calcule o resto da divisão de 28^{237} por 13.

(b) Determine o algarismo das unidades do número $7^{(7^{1000})}$.

Solução

(a) Como $28 = 2 \cdot 13 + 2$, tem-se que $28 \equiv 2 \bmod 13$. Daí obtém-se que

$$28^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \bmod 13$$

$$28^3 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \bmod 13$$

$$28^4 \equiv 2^4 \equiv 3 \bmod 13$$

$$28^6 \equiv 4 \cdot 3 \equiv -1 \bmod 13$$

Escrevendo $237 = 6 \cdot 39 + 3$, segue que

$$28^{237} \equiv 28^{6 \cdot 39+3} \equiv (28^6)^{39} \cdot 28^3 \equiv -8 \equiv 5 \bmod 13$$

Portanto, o resto é igual a 5.

Solução Alternativa (a):

Tem-se que $28 = 2 \cdot 13 + 2$, logo $28 \equiv 2 \bmod 13$. Como $(2, 13) = 1$, aplicando o Pequeno Teorema de Fermat, segue-se que $2^{12} \equiv 1 \bmod 13$ e assim
$28^{12} \equiv 2^{12} \equiv 1 \bmod 13$.
Escrevendo $237 = 12 \cdot 19 + 9$,

$$28^{237} \equiv 28^{12 \cdot 19+9} \equiv (28^{12})^{19} \cdot 28^9 \equiv 28^9 \bmod 13$$

Finalizando

$$28^4 \equiv 2^4 \equiv 3 \bmod 13$$

$$28^8 \equiv 9 \bmod 13$$

$$28^9 \equiv 18 \equiv 5 \bmod 13$$

Portanto, $28^{237} \equiv 5 \bmod 13$.

(b)Calcular o algarismo das unidades de $7^{(7^{1000})}$ equivale a calcular o resto da divisão deste número por 10. Tem-se que

$$7 \equiv -3 \bmod 10$$

$$7^2 \equiv 9 \bmod 10$$

$$7^4 \equiv 9^2 \equiv 1 \bmod 10$$

$$7^{4 \cdot q} \equiv (7^4)^q \equiv 1 \bmod 10, \text{ para todo } q \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,
$7 \equiv -1 \bmod 4$, logo $7^{1000} \equiv 1 \bmod 4$.
Segue que $7^{1000} = 4 \cdot q + 1$, $7^{(7^{1000})} \equiv 7^{4 \cdot q+1} \equiv 7^{4 \cdot q} \cdot 7 \equiv 7 \bmod 10$
Portanto, o algarismo das unidades de $7^{(7^{1000})}$ é igual a 7.

Pauta de Correção
Item (a)

- Calcular 28^6 ou 28^{12} módulo 13 $[0, 25]$
- Calcular o resto $[0, 25]$

Item (b)

- Calcular 7^{4q} módulo 10 $[0,25]$
- Calcular o algarismo das unidades $[0,25]$

Questão 04 [**1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50**]

(a) Prove a desigualdade de Bernoulli:

Se $x \in \mathbb{R}, x \geqslant -1$, então $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Prove que a sequência $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ é crescente, ou seja, que $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geqslant 1$.

Sugestão: Mostre que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^n$ e use o item (a).

Solução

(a) Seja $P(n)$ a proposição $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Temos que $P(1)$ é verdadeira, uma vez que $1+x \geqslant 1+x$.

Suponha agora que $P(n)$ seja verdadeira para $n=k$. Mostraremos que $P(k)$ implica $P(k+1)$. De fato, considere $(1+x)^k \geqslant 1+kx$. Note que $(1+x)$ é um número real não negativo, visto que $x \geqslant -1$. Assim, multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por $(1+x)$, temos

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} = (1+x)^k\cdot(1+x) &\geqslant (1+kx)\cdot(1+x)\\ &= 1+kx+x+kx^2\\ &= 1+(k+1)x+kx^2\\ &\geqslant 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é verdadeira pelo fato do termo kx^2 ser não negativo.

(b) Seja $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Note que $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$.

Temos então que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n\cdot(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+1}} =$$

$$\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right]^n.$$

Como $\dfrac{-1}{(n+1)^2} \geqslant -1$ segue, pela desigualdade de Bernoulli, que

$$\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right]^n \geqslant \frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[1+\frac{-n}{(n+1)^2}\right].$$

Assim segue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left[1+\frac{-n}{(n+1)^2}\right] = \frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2} =$$

$$\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Portanto $a_{n+1} > a_n$.

Pauta de correção:

Item (a)

- Fazer o P(1) e indicar a estratégia de prova por indução. [0,25]
- Fazer o passo de indução. [0,25]

Item (b)

- Mostrou a identidade para $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ da sugestão, e usou o item (a). [0,25]
- Finalizou corretamente a questão. [0,25]

Questão 05 [**1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50**]

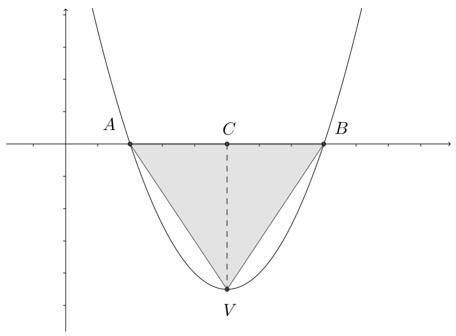
Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática com $a > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
Considere o triângulo ABV, onde A e B são os pontos de interseção da parábola correspondente ao gráfico de f com o eixo das abcissas e V é o vértice da parábola.

(a) Mostre que $\overline{BV} = \dfrac{\sqrt{\Delta(\Delta+4)}}{4a}$.

(b) Mostre que o triângulo ABV é equilátero se, e somente se, $\Delta = 12$.

Solução

(a) Seja C o ponto médio do segmento AB.



As coordenadas dos pontos são

$$A = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), B = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), C = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCV, temos que

$$\overline{BV}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CV}^2.$$

Calculando os comprimentos dos segmentos:

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad \overline{CV} = \frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto,

$$\overline{BV}^2 = \frac{\Delta}{4a^2} + \frac{\Delta^2}{16a^2} = \frac{\Delta^2 + 4\Delta}{16a^2}, \text{ logo } \overline{BV} = \frac{\sqrt{\Delta(\Delta+4)}}{4a}.$$

(b) Como o triângulo é isósceles (pela simetria da parábola), $\overline{BV} = \overline{AV}$. Portanto, o triângulo será equilátero se, e somente se, $\overline{BV} = \overline{AB}$. Temos

$$\overline{BV} = \overline{AB} \iff \frac{\sqrt{\Delta(\Delta+4)}}{4a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \iff \sqrt{\Delta+4} = 4 \iff \Delta = 12.$$

Pauta de Correção

Item (a)

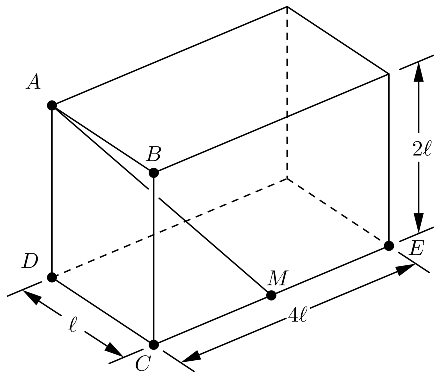
- Escrever corretamente as coordenadas dos pontos A, B e V. [0,25]
- Calcular o comprimento do segmento BV. [0,25]

Item (b)

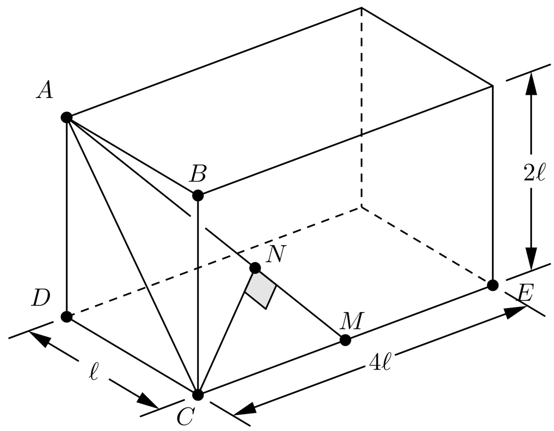
- Estabelecer alguma condição necessária e suficiente para o triângulo ser equilátero. [0,25]
- Igualar as expressões e calcular Δ corretamente. [0,25]

Questão 06 [1,00]

No paralelepípedo reto retângulo da figura seguinte, calcule a distância do vértice C ao segmento AM, sendo M o ponto médio de CE.



Solução



Inicialmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, calculamos o comprimento do segmento AC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \ell^2 + (2\ell^2).$$

Daí segue que $\overline{AC} = \ell\sqrt{5}$.

Analisando agora o triângulo ACM, concluímos que ele é retângulo em C pois o segmento MC é perpendicular à face $ABCD$ do paralelepípedo e, portanto, perpendicular ao segmento AC contido nesta face.

Ainda observando o triângulo retângulo ACM, o segmento CN é perpendicular à hipotenusa AM pois CN representa a distância de C à reta AM e, por definição, distância de ponto à reta é sempre perpendicular à reta.

Então, usando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{AM}^2 = (2\ell)^2 + \left(\ell\sqrt{5}\right)^2,$$

e assim

$$\overline{AM} = 3\ell.$$

Usando que o produto da hipotenusa pela altura correspondente é igual ao produto dos catetos temos que:

$$\overline{AM} \cdot \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \overline{CM},$$

substituindo os valores correspondentes temos que:

$$3\ell \cdot \overline{CN} = \ell\sqrt{5} \cdot 2\ell,$$

logo,

$$\overline{CN} = \frac{2\ell\sqrt{5}}{3}.$$

Pauta de correção:

- Calcular $\overline{AC}$ corretamente. [0,25]
- Calcular $\overline{AM}$ corretamente. [0,25]
- Observar que a distância de C ao segmento AM é o comprimento de um segmento CN perpendicular a AM. [0,25]
- Calcular $\overline{CN}$. [0,25]

Questão 07 [1,00]

Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $\left(1 - \cos^2 x\right)^{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = 1$.

Solução

Reescrevendo a equação da forma

$$(\operatorname{sen}^2 x)^{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = 1,$$

notamos inicialmente que a equação está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ visto que a base é um número real não negativo. Usando propriedades das exponenciais, observamos a ocorrência de apenas duas situações:

(i) A base é igual a 1 e o expoente é um número real qualquer, ou seja, $\operatorname{sen}^2 x = 1$ e $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}$.
Nesse caso temos $\operatorname{sen} x = \pm 1$, isto é, $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

(ii) A base é um número real positivo e o expoente é nulo, isto é, $\operatorname{sen}^2 x > 0$ e $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.
Nesse caso, temos $3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, isto é, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Observação: Visto que $\text{sen}^2 x$ e $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ não se anulam para o mesmo valor de x, a situação 0^0 nunca ocorre na equação.

Pauta de Correção:

- Analisar, no caso (i), a ocorrência $\text{sen}\, x = 1$. [0,25]
- Analisar, no caso (i), a ocorrência $\text{sen}\, x = -1$. [0,25]
- Fazer corretamente o caso (ii). [0,5]

Questão 08 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geqslant 2$ e $m \geqslant 1$.

(a) Quantas filas distintas poderão ser formadas, tendo um homem no final da fila?

(b) Qual a probabilidade de uma das filas do item (a) ter um homem na primeira posição da fila?

Solução

(a) Há h possibilidades de escolha do homem para o final da fila. Em seguida devemos formar uma fila com $h + m - 1$ pessoas ($h - 1$ homens e m mulheres) que pode ser feito de $(h + m - 1)!$ maneiras. Com isso, o número de filas possíveis tendo um homem no final é igual a $h \cdot (h + m - 1)!$.

(b) Para formar uma fila com um homem no final e outro no início, temos h possibilidades para o homem no final, $h - 1$ maneiras para escolha do primeiro da fila e $(m+h-2)!$ modos de formar o restante da fila. Assim temos $h(h-1)(h+m-2)!$ filas com um homem em primeiro lugar e um homem no final da fila.

Portanto a probabilidade de uma das filas do item (a) ter um homem em primeiro lugar é igual a

$$\frac{h(h-1)(h+m-2)!}{h \cdot (h+m-1)!} = \frac{(h-1)(h+m-2)!}{(h+m-1)(h+m-2)!} = \frac{h-1}{h+m-1} \ .$$

Pauta de correção:

Item (a)

- Calcular corretamente a quantidade de filas. [0,5]

Item (b)

- Encontrar o total de casos favoráveis. [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade. [0,25]