Questão 01 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

(a) Seja x_0, y_0 uma solução da equação diofantina $aX + bY = c$, onde a, b são inteiros não nulos e $(a, b) = 1$. Prove que as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são $x = x_0 + tb$ e $y = y_0 - ta$, com $t \in \mathbb{Z}$.

(b) Encontre TODAS as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ da equação $7X + 19Y = 781$.

Solução

(a) Seja x, y uma solução de $aX + bY = c$, logo $ax_0 + by_0 = ax + by = c$. Consequentemente,

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Como $(a, b) = 1$, segue-se que $b|(x - x_0)$, logo $x - x_0 = tb$, com $t \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x - x_0$ na equação acima, segue-se que $y_0 - y = ta$, isto é, as soluções são do tipo exibido.
Por outro lado, x, y como no enunciado são soluções, pois

$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta) = ax_0 + by_0 = c.$$

(b) Uma solução da equação $7X + 19Y = 781$ é $x_0 = 3$ e $y_0 = 40$. De fato, $7 \cdot 3 + 19 \cdot 40 = 21 + 760 = 781$. Pelo item (a) as soluções da equação são: $x = 3 + 19t$ e $y = 40 - 7t$ com $t \in \mathbb{Z}$. Para encontrar as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ devemos ter $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Assim segue que

$$3 + 19t \geqslant 0 \Leftrightarrow 19t \geqslant -3 \Leftrightarrow t \geqslant -\frac{3}{19}$$
$$40 - 7t \geqslant 0 \Leftrightarrow -7t \geqslant -40 \Leftrightarrow t \leqslant \frac{40}{7}$$

Logo $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e as soluções procuradas são: $(3, 40)$, $(22, 33)$, $(41, 26)$, $(60, 19)$, $(79, 12)$, $(98, 5)$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Verificar que $x = x_0 + tb$ e $y = y_0 - ta$ são soluções da equação. [0,25]
- Verificar que as soluções são necessariamente $x = x_0 + tb$ e $y = y_0 - ta$. [0,25]

Item (b)

- Encontrar a solução geral da equação. [0,25]
- Encontrar as soluções naturais. [0,25]

Questão 02 [1,00]

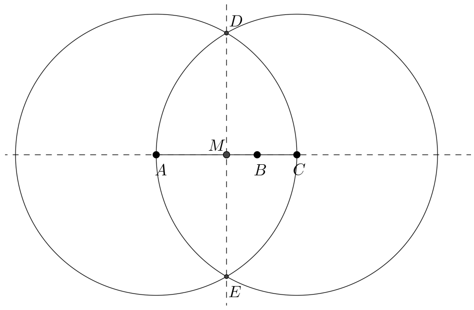
Dados dois segmentos de medidas distintas a e b, descreva como construir, com régua e compasso, segmentos de medidas $\dfrac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$.

Observação: Considere conhecida a construção de perpendiculares.

Solução

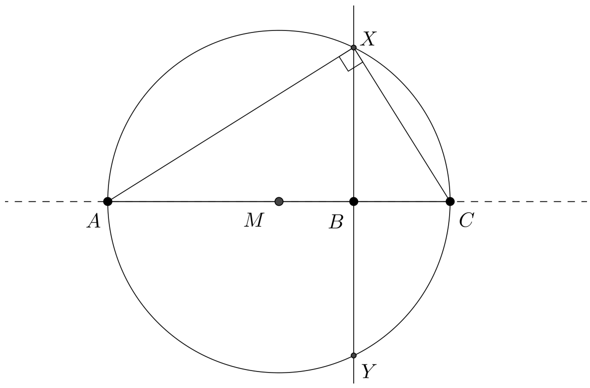
Consideramos três pontos colineares A, B e C, de maneira que B pertença ao segmento AC, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$.

Construção de $\dfrac{a+b}{2}$:



- Traçamos duas circunferências de raio $a+b$, uma com centro em A e outra com centro em B. Chamamos de D e E os pontos de interseção entre elas.
- Traçamos a reta por D e E. Chamamos de M a interseção dessa reta com o segmento AC.
- O segmento AM mede $\dfrac{a+b}{2}$, uma vez que DM é altura do triângulo equilátero ACD e portanto é mediana.

Construção de $\sqrt{ab}$:



- Traçamos uma circunferência de centro no ponto médio M e raio $\dfrac{a+b}{2}$.
- Traçamos uma perpendicular a AC passando por B. Chamamos de X e Y as interseções dessa perpendicular com a circunferência.
- O segmento BX mede $\sqrt{ab}$, pois é a altura do triângulo retângulo ACX e portanto $\overline{BX}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Pauta de Correção:

- Construir um segmento de tamanho $\dfrac{a+b}{2}$. [0,5]
- Construir um segmento de tamanho $\sqrt{ab}$. [0,5]

Questão 03 [**1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50**]

(a) Seja $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a fração irredutível $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, é raiz de $p(X)$, mostre que a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n.

(b) Encontre todas as raízes reais do polinômio

$$p(X) = 2X^4 + X^3 - 7X^2 - 3X + 3.$$

Solução

(a) Como $p\left(\frac{a}{b}\right) = a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_0 = 0$, multiplicando a igualdade por b^n

temos que $a_na^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + a_2a^2b^{n-2} + a_1ab^{n-1} + a_0b^n = 0$.

Logo $a_na^n = -(a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_2a^2b^{n-3} + a_1ab^{n-2} + a_0b^{n-1})b$ e

$a_0b^n = -(a_na^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2}b + \cdots + a_2ab^{n-2} + a_1b^{n-1})a$.

Mas a e b são primos entre si, portanto segue das duas últimas igualdades

acima que b é divisor de a_n e a é divisor de a_0.

(b) Nesse caso, os divisores de $a_0 = 3$ são $1, -1, 3$ e -3 e os divisores de $a_4 = 2$ são $1, -1, 2$ e -2.

Logo as possíveis raízes racionais de $p(X)$ são $1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$.

Agora $p(1) = -4$, $p(-1) = 0$, $p(3) = 120$, $p(-3) = 84$, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e, com isso, temos duas raízes

racionais de $p(X)$, a saber -1 e $\frac{1}{2}$. Assim o polinômio $p(X)$ é divisível por $X - (-1) = X + 1$ e por $2\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

Dividindo $p(X)$ por $(X+1)(2X-1) = 2X^2 + X - 1$ segue que $p(X) = (2X^2 + X - 1)(X^2 - 3)$.

Portanto $p(X) = 0$ se, e somente se, $2X^2 + X - 1 = 0$ ou $X^2 - 3 = 0$ e as raízes de $p(X)$ são as soluções

dessas equações do segundo grau, ou seja, $-1, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Substituir $\frac{a}{b}$ em $p(X) = 0$ e obter uma igualdade sem denominadores.[0,25]
- Concluir que a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n. [0,25]

item (b)

- Encontrar as raízes racionais de $p(X)$. [0,25]
- Encontrar as raízes irracionais de $p(X)$. [0,25]

Questão 04 [**1,00 ::: (a)=0,25; (b)=0,25; (c)=0,50**]

A sequência (a_n) satisfaz as seguintes condições:

- $a_1 = \dfrac{1}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 a_n$, para $n \geqslant 2$.

(a) Determine a_2, a_3 e a_4.

(b) Conjecture uma expressão para o termo geral a_n, em função de n.

(c) Prove, por indução em n, a fórmula obtida no item (b).

Solução

(a) Pela definição da sequência a_n segue que $a_1 + a_2 = 2^2 a_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 3^2 a_3$ e $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4^2 a_4$.

Como $a_1 = \dfrac{1}{2}$, obtemos $a_2 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{6}$, $a_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 4} = \dfrac{1}{12}$ e $a_4 = \dfrac{1}{4 \cdot 5} = \dfrac{1}{20}$.

(b) Pelos resultados obtido no item (a), é possível conjecturar que $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, para todo $n \geqslant 1$.

(c) Seja $P(n)$ a proposição: $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, para todo $n \geqslant 1$.

Para $n = 1$ temos que $a_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1 \cdot 2}$.

Suponha agora que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja, $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Resta provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$. De fato, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = (k+1)^2 a_{k+1}$.

Usando a definição para k temos que $k^2 a_k + a_{k+1} = (k+1)^2 a_{k+1}$, logo $a_{k+1} = \dfrac{k a_k}{k+2}$.

Agora usando a hipótese de indução segue que $a_{k+1} = \dfrac{k}{k+2} a_k = \dfrac{k}{k+2} \cdot \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Encontrar a_2, a_3 e a_4. [0,25]

Item (b)

- Conjecturar a_n de forma correta. [0,25]

Item (c)

- Provar o item (c). [0,5]

Alternativa Item (c)

- Usar a definição da sequência para mostrar que $a_{k+1} = \dfrac{k a_k}{k+2}$. [0,25]
- Usar a hipótese de indução e concluir a demonstração. [0,25]

Questão 05 [1,00]

Se p é um número natural primo, mostre que $2^{(p+1)^3} \equiv 256 \mod p$.

Solução

Como p é primo, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que

$$2^p \equiv 2 \text{ mod } p.$$

Usando propriedades das congruências, segue que

$$2^{p^2} = (2^p)^p \equiv 2^p \equiv 2 \text{ mod } p$$

$$2^{p^3} = (2^p)^{p^2} \equiv 2^{p^2} \equiv 2 \text{ mod } p$$

$$2^{3p^2} = (2^{p^2})^3 \equiv 2^3 \text{ mod } p$$

$$2^{3p} = (2^p)^3 \equiv 2^3 \text{ mod } p.$$

Portanto,

$$2^{(p+1)^3} = 2^{p^3} \cdot 2^{3p^2} \cdot 2^{3p} \cdot 2^1 \equiv 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2 \equiv 256 \text{ mod } p.$$

Solução alternativa:

$2^{p+1} \equiv 4 \text{ mod } p$

$2^{(p+1)^2} \equiv 4^{p+1} \equiv (2^{p+1})^2 \equiv 16 \text{ mod } p$

$2^{(p+1)^3} \equiv 16^{p+1} \equiv (4^{p+1})^2 \equiv 16^2 \equiv 256 \text{ mod } p.$

Pauta de Correção:

- Usar o Pequeno de Fermat. [0,25]
- Calcular duas congruências. [0,25]
- Completar o cálculo das outras duas congruências. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 06 [**1,00**]

Seja $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ uma função bijetiva, onde $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$ são intervalos de números reais. Considere ainda $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ e $y_1,\ y_2$ números reais positivos. Mostre que existe um único $c \in [a, b]$ tal que

$$f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 = f(c)\,(y_1 + y_2)\,.$$

Solução

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ e y_1, y_2 números reais positivos. Temos que

$$f(a)(y_1 + y_2) = f(a)y_1 + f(a)y_2 \leqslant f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 \ \text{ e}$$

$$f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 \leqslant f(b)y_1 + f(b)y_2 = f(b)(y_1 + y_2).$$

Assim segue que $f(a) \leqslant \dfrac{f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2}{y_1 + y_2} \leqslant f(b)$.

Como f é uma bijeção entre $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$, existe um único $c \in [a, b]$

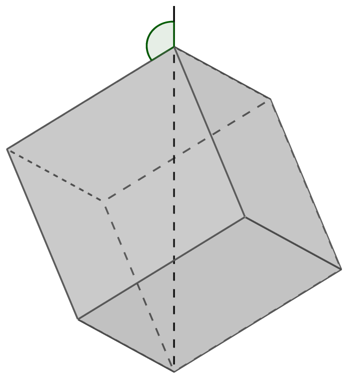
tal que $f(c) = \dfrac{f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2}{y_1 + y_2}$, ou seja, $f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 = f(c)(y_1 + y_2)$.

Pauta de Correção:

- Usar ou observar que $f(a) \leqslant f(x_1) \leqslant f(b)$ e $f(a) \leqslant f(x_2) \leqslant f(b)$. [0,25]
- Mostrar que $\dfrac{f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2}{y_1 + y_2}$ pertence ao intervalo $[f(a), f(b)]$. [0,5]
- Concluir a existência e a unicidade de c. [0,25]

Questão 07 [1,00]

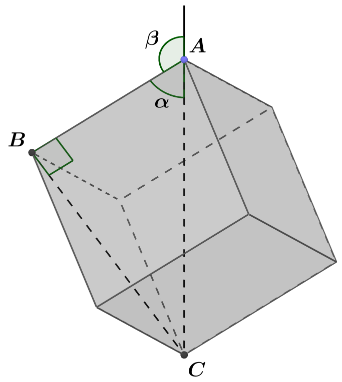
Um cubo está pendurado por um de seus vértices, de forma que a corda que o sustenta é colinear a uma das diagonais do cubo, como mostra a figura.



Determine o cosseno do ângulo entre a corda e uma das arestas do cubo que lhe são adjacentes, representado na figura.

Solução

Denotando o vértice por onde o cubo está pendurado por A, o vértice oposto por C e um dos vértices das arestas adjacentes à corda por B, como na figura, temos que o ângulo β procurado é suplementar ao ângulo $\alpha := B\hat{A}C$.



Denotando por a a aresta do cubo, temos $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = a\sqrt{3}$. Como BC é perpendicular a AB, o triângulo ABC é reto em B, logo $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Como α e β são suplementares, temos que $\cos\beta = -\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solução alternativa:

Considere o ângulo $\gamma := A\hat{C}B$. Como $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $\beta = \gamma + 90°$ (a medida de um ângulo externo do triângulo é a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele), temos:

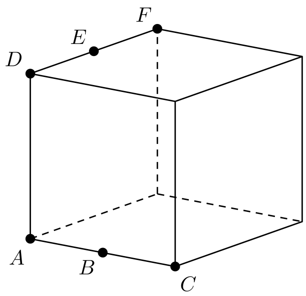
$$\beta - 90° = \gamma \Rightarrow \operatorname{sen}(\beta - 90°) = \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{sen}(90° - \beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pauta de Correção:

- Construir um triângulo retângulo que tenha como lados uma aresta, a diagonal do cubo e a diagonal de uma face. [0,25]
- Calcular a medida da diagonal do cubo em função da aresta. [0,25]
- Calcular o cosseno do ângulo suplementar ao pedido ($\cos\alpha$) ou o seno do ângulo da solução alternativa ($\operatorname{sen}\gamma$). [0,25]
- Obter o cosseno do ângulo pedido ($\cos\beta$). [0,25]

Questão 08 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

Considere os pontos A, B, C, D, E e F de um cubo distribuídos como na figura abaixo.



Determine a probabilidade de,

(a) escolhidos ao acaso 3 pontos distintos dentre os 6 dados, eles determinarem um único plano.

(b) escolhidos ao acaso 4 pontos distintos dentre os 6 dados, eles serem coplanares.

Solução

(a) O número de escolhas de 3 pontos distintos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$ é

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Três pontos no espaço determinam um único plano se, e somente se, não são colineares. Dentre as 20 escolhas diferentes de três pontos, apenas 2 contêm todos os pontos colineares, a saber, $\{A, B, C\}$ e $\{D, E, F\}$. Portanto, há 18 escolhas em que os 3 pontos determinam um único plano. Logo, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

(b) O número de escolhas de 4 pontos distintos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$ é

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

Como os pontos dados estão distribuídos em duas arestas reversas, temos que quatro deles são coplanares se, e somente se, houver três deles colineares.

Há 3 possibilidades contendo $\{A, B, C\}$ e 3 possibilidades contendo $\{D, E, F\}$, fazendo um total de 6 casos favoráveis. Portanto a probabilidade é

$$P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Pauta de Correção:

Item (a)

- Fazer a contagem dos 3 pontos que determinam um plano. [0,25]
- Calcular a probabilidade. [0,25]

Item (b)

- Fazer a contagem dos 4 pontos coplanares. [0,25]
- Calcular a probabilidade. [0,25]