ENQ – 2016.2 – Gabarito

Questão 01 [1,00]

A secretaria de educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividi-los entre 7 escolas sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Encontre a quantidade de livros.

Solução

Indicando por N a quantidade de livros, temos que

$$\begin{cases} N \equiv 4 \bmod 7 \\ N \equiv 2 \bmod 9 \\ N \equiv 6 \bmod 13 \end{cases}$$

Como $(7,9)=1$, $(9,13)=1$ e $(7,13)=1$, o sistema tem solução.

Pelo Teorema Chinês dos Restos as soluções do sistema são dadas por

$$N \equiv 117\cdot y_1\cdot 4 + 91\cdot y_2\cdot 2 + 63\cdot y_3\cdot 6 \bmod 819$$

onde

$$\begin{cases} 117y_1 \equiv 1 \bmod 7 \\ 91y_2 \equiv 1 \bmod 9 \\ 63y_3 \equiv 1 \bmod 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y_1 \equiv 1 \bmod 7 \\ y_2 \equiv 1 \bmod 9 \\ 11y_3 \equiv 1 \bmod 13 \end{cases}$$

Os inteiros $y_1 = 3$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 6$ satisfazem as condições acima, portanto

$$N \equiv 117\cdot 3\cdot 4 + 91\cdot 2 + 63\cdot 6\cdot 6 \bmod 819$$
$$N \equiv 3854 \equiv 578 \bmod 819.$$

Como $1000 < N < 2000$, obtemos $N = 1397$.

Pauta de Correção:

- Montar o sistema. [0,25]
- Escrever a solução geral do sistema. [0,25]
- Encontrar os valores de y_1, y_2 e y_3. [0,25]
- Encontrar a solução pedida. [0,25]

Solução Alternativa:

Seja X a quantidade de livros comprada pela secretaria.

Temos que $X \equiv 4 \mod 7$, $X \equiv 2 \mod 9$ e $X \equiv 6 \mod 13$.

Pela primeira equação modular segue que $X = 7k + 4$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo na segunda equação vemos que $7k + 4 \equiv 2 \mod 9$, somando 5 em ambos os lados temos que $7k \equiv 7 \mod 9$,

ou seja, $k \equiv 1 \mod 9$.

Logo $k = 9n + 1$ e assim $X = 7k + 4 = 7(9n + 1) + 4 = 63n + 11$.

Colocando essa informação na terceira equação segue que $63n + 11 \equiv 6 \mod 13$.

Isso implica que $11n \equiv 8 \mod 13$. Multiplicando essa equação por 6 temos que $66n \equiv 48 \mod 13$, ou seja, $n \equiv 9 \mod 13$.

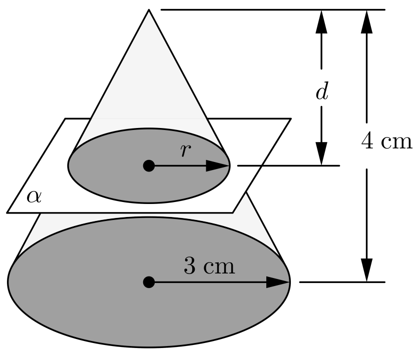
Assim segue que $n = 13t + 9$ e $X = 63n + 11 = 63(13t + 9) + 11 = 819t + 578$. Como $1000 < X < 2000$, concluímos que a resposta é $X = 1397$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Montar o sistema. [0,25]
- Substituir a primeira congruência na segunda e a segunda na terceira. [0,25]
- Escrever a solução geral do sistema. [0,25]
- Encontrar a solução pedida. [0,25]

Questão 02 [**1,00**]

O cone da figura seguinte tem 3 cm de raio e 4 cm de altura, sendo d a distância do vértice a um plano α, paralelo à base.



Determine d de modo que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais.

Solução

Sejam v o volume do cone pequeno, V o volume do cone grande e V_t o volume do tronco do cone.

Observe que o cone pequeno unido ao tronco de cone completam o cone grande, logo

$$v + V_t = V.$$

Queremos $v = V_t$. logo

$$2v = V,$$

ou ainda,

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{2}.$$

Como a razão dos volumes dos cones é igual ao cubo da razão das alturas correspondentes, temos

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{d}{4}\right)^3,$$

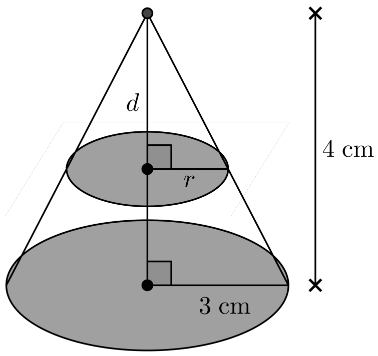
logo

$$d = 2\sqrt[3]{4}\text{cm}.$$

Pauta de Correção:

- Observar que o volume do cone pequeno é a metade do volume total [0,25]
- Utilizar que a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão entre as alturas. [0,5]
- Determinar corretamente o valor de d. [0,25]

Solução Alternativa:



Pela semelhança entre os triângulos da figura,

$$\frac{r}{3} = \frac{d}{4},$$

logo $r = \dfrac{3d}{4}$.

Com isso, o volume do cone menor será dado por

$$v = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, d = \frac{1}{3}\left(\frac{3d}{4}\right)^2 d = \frac{3}{16}\pi\, d^3.$$

O volume total do cone é

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi,$$

e como $v = \dfrac{1}{2}V$, segue que

$$\frac{3}{16}\pi\, d^3 = \frac{1}{2} \cdot 12\pi,$$

que, simplificando, nos dá

$$d^3 = 32,$$

e assim

$$d = 2\sqrt[3]{4}\text{cm}.$$

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Escrever corretamente r em função de d. [0,25]
- Obter o volume do cone menor em função apenas de d. [0,25]
- Calcular corretamente o volume V do cone total e observar que $v = \frac{1}{2}V$. [0,25]
- Determinar corretamente o valor de d. [0,25]

Questão 03 [1,00]

Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = 1$.

Prove que $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

Solução

Como x e y são positivos, a inequação é equivalente à

$$(x+1)(y+1) \geqslant 9xy.$$

Pela hipótese $x + y = 1$, podemos isolar $y = 1 - x$ e, substituindo na equação, obter a desigualdade equivalente

$$(x+1)(2-x) \geqslant 9x(1-x),$$

que pode ser reescrita como

$$8x^2 - 8x + 2 \geqslant 0,$$

ou ainda

$$8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

A última desigualdade, que é satisfeita para todo valor de x, é equivalente à original. Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9.$$

Pauta de Correção:

- Chegar corretamente a uma desigualdade envolvendo apenas uma das variáveis e equivalente à original. [0,5]
- Concluir que a desigualdade sempre é satisfeita. [0,5]

Solução Alternativa 1

Como na primeira solução, a equação é equivalente a

$$(x+1)(y+1) \geqslant 9xy.$$

Esta última desigualdade pode ser simplificada para $x+y+1 \geqslant 8xy$.
Agora, usando a hipótese de que $x+y=1$, podemos simplificar ainda mais para $2 \geqslant 8xy$, ou seja, $xy \leqslant \frac{1}{4}$, mas isto é verdadeiro por causa da desigualdade das médias. De fato, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$, e portanto $xy \leqslant \frac{1}{4}$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa 1:

- Chegar à desigualdade $xy \leqslant \frac{1}{4}$. [0,25]
- Usar a hipótese. [0,25]
- Resolver a inequação. [0,5]

Solução Alternativa 2
Como $x+y=1$ segue que $\frac{1}{xy} = \frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$.

Logo $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} = 1 + \frac{2}{xy}$.

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \text{ que é equivalente a } \frac{1}{xy} \geqslant \frac{4}{(x+y)^2}.$$

Assim segue que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{2}{xy} \geqslant 1 + \frac{2 \cdot 4}{(x+y)^2} = 1 + 8 = 9.$$

Pauta de Correção da Solução Alternativa 2:

- Chegar à igualdade $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{2}{xy}$. [0,25]
- Usar a desigualdade das médias. [0,25]
- Concluir o que se pede. [0,5]

Questão 04 **[1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]**

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Se $f(k) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, mostre que a e b são inteiros.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $f(k) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que a, b e c são todos inteiros? Justifique a sua resposta.

Solução

(a) Como $f(0) = b$ segue que b é inteiro. Além disso, $f(1) = a + b \in \mathbb{Z}$ temos que

$a + b = c$, com c inteiro, então $a = c - b \in \mathbb{Z}$.

(b) A resposta é não.

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Para todo inteiro k, $k(k+1)$ é par, logo

$$f(k) = \frac{1}{2}(k^2 + k) = \frac{1}{2} \cdot k(k+1) \in \mathbb{Z}.$$

Pauta de Correção:

Item (a)

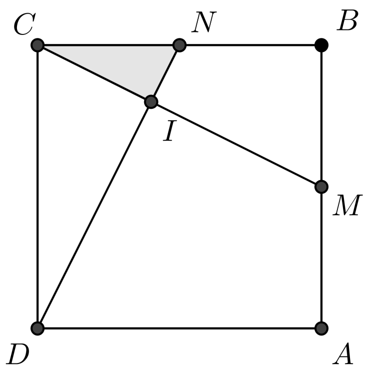
- Calcular $f(0)$ e concluir que b é inteiro. [0,25]
- Calcular $f(1)$ e concluir que a é inteiro. [0,25]

Item (b)

- Dar um contraexemplo. [0,25]
- Justificar que a função do contraexemplo satisfaz $f(k) \in \mathbb{Z}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. [0,25]

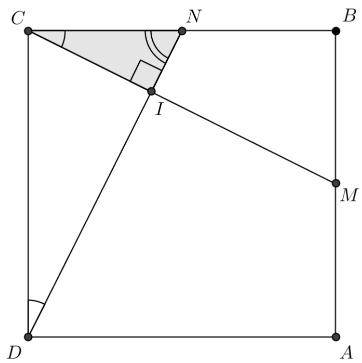
Questão 05 [1,00]

Sejam $ABCD$ um quadrado de lado 1 (uma unidade), M o ponto médio de AB, N o ponto médio de BC e I a interseção de DN e CM. Calcule a área do triângulo NIC.



Solução

Observe que os triângulos retângulos NCD e MBC são congruentes pelo caso LAL. Consequentemente, temos $\angle NCI \equiv \angle CDN$. Como $\angle CDN$ e $\angle CND$ são complementares, temos então que $\angle NCI$ e $\angle INC$ também o são, logo o triângulo NIC é retângulo de hipotenusa CN.



Os triângulos NIC e MBC têm um ângulo em comum e cada um destes triângulos possui um ângulo reto. Assim, eles têm dois ângulos congruentes e, por isso, são semelhantes. A razão de semelhança entre os triângulos NIC e MBC é dada por

$$k = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Com isso,

$$\frac{\text{Área}(NIC)}{\text{Área}(MBC)} = k^2 = \frac{1}{5},$$

logo

$$\text{Área}(NIC) = \frac{1}{5}\text{Área}(MBC),$$

e, como

$$\text{Área}(MBC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

temos

$$\text{Área}(NIC) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Pauta de Correção:

- Concluir que o triângulo NIC é retângulo. [0,25]
- Concluir que os triângulos NIC e MBC são semelhantes. [0,25]
- Concluir que $\frac{\text{Área}(NIC)}{\text{Área}(MBC)} = \frac{1}{5}$ ou igualdade equivalente. [0,25]
- Calcular a área do triângulo NIC. [0,25]

Questão 06 [**1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50**]

De quantas maneiras distintas podemos escolher três números distintos do conjunto $I_{40} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 40\}$ de modo que sua soma seja:

(a) um número ímpar?

(b) um múltiplo de 3?

Solução

(a) Temos que $I_{40} = \{1, 2, ..., 39, 40\} = \underbrace{\{1, 3, ..., 39\}}_{\text{20 ímpares}} \cup \underbrace{\{2, 4, ..., 40\}}_{\text{20 pares}}.$

Para obtermos um número ímpar, somando três números, temos duas possibilidades: três ímpares ou apenas um deles ímpar.

O número de possibilidades para a escolha de 3 ímpares distintos é igual

a $C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140.$

Já, o número de possibilidades para escolhermos dois pares e um ímpar distintos é $20 \cdot C_{20}^{2} = 20 \cdot \dfrac{20!}{2!18!} = 20 \cdot \dfrac{19 \cdot 20}{2} = 3800.$

Portanto, a resposta é $1140 + 3800 = 4940$.

(b) Temos que

$$I_{40} = \{1, 2, ..., 39, 40\} = \underbrace{\{3, 6, ..., 39\}}_{\text{13 múltiplos de 3}} \cup \underbrace{\{1, 4, 7, ..., 40\}}_{\text{14 da forma } 3k+1} \cup \underbrace{\{2, 5, 8, ..., 38\}}_{\text{13 da forma } 3k+2}$$

Para obtermos um múltiplo de 3, somando três números, temos 4 possibilidades: três múltiplos de 3, três da forma $3k+1$, três da forma $3k+2$ ou

tomando os três de formas distintas $3k, 3k+1$ e $3k+2$.

Portanto, a resposta é

$C_{13}^{3} + C_{14}^{3} + C_{13}^{3} + 13 \cdot 14 \cdot 13 = 286 + 364 + 286 + 2366 = 3302.$

Pauta de Correção:

Item (a)

- Analisar corretamente as possibilidades de escolhas dos três números. [0,25]
- Fazer corretamente a contagem. [0,25]

item (b)

- Analisar corretamente as possibilidades de escolhas dos três números. [0,25]
- Fazer corretamente a contagem. [0,25]

Questão 07 [1,00]

Mostre que, para todo número natural $n \geqslant 1$, o resto da divisão do polinômio $x^{2n} + x + 1$ por $x^2 - 1$ é igual a $x + 2$.

Solução

Provaremos o resultado usando indução em n.

Para $n = 1$ temos que $x^2 + x + 1 = 1 \cdot (x^2 - 1) + (x + 2)$.

Supõe que o resultado vale para um certo $k \geqslant 1$, isto é,

$x^{2k} + x + 1 = q(x)(x^2 - 1) + (x + 2)$ ou ainda $x^{2k} = q(x)(x^2 - 1) + 1$.

Agora vamos mostrar a validade do resultado para $k + 1$. De fato,

$x^{2(k+1)} + x + 1 = x^{2k+2} + x + 1 = x^2 \cdot x^{2k} + x + 1 = x^2 \left[q(x)(x^2 - 1) + 1\right] + x + 1 =$

$x^2 \cdot q(x)(x^2 - 1) + x^2 + x + 1 = \left[x^2 \cdot q(x) + 1\right](x^2 - 1) + (x + 2).$

Portanto vale o resultado para todo $n \geqslant 1$.

Pauta de Correção:

- Verificar que a afirmação é válida para $n = 1$. [0,25]
- Explicitar a hipótese de indução. [0,25]
- Concluir a prova. [0,5]

Solução Alternativa 1:

$$\begin{aligned} x^{2n} + x + 1 &= (x^2)^n + x + 1 \\ &= (x^2 - 1 + 1)^n + x + 1 \\ &= (x^2 - 1)^n + n(x^2 - 1)^{n-1} + \cdots + n(x^2 - 1) + 1^n + x + 1 \\ &= (x^2 - 1) \cdot q(x) + 1 + x + 1 \\ &= (x^2 - 1) \cdot q(x) + (x + 2) \end{aligned}$$

Como $x + 2$ tem grau 1, é o resto da divisão.

Pauta de Correção da Solução Alternativa 1:

- Escrever que $x^2 = x^2 - 1 + 1$. [0,25]
- Desenvolver o polinômio na forma $q(x)(x^2 - 1) + x + 2$. [0,5]
- Concluir que $x + 2$ é o resto. [0,25]

Solução Alternativa 2:
Sabemos que $y^n - 1 = (y - 1)(y^{n-1} + \cdots + y + 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} x^{2n} + x + 1 &= (x^2)^n + x + 1 \\ &= (x^2)^n - 1 + 1 + x + 1 \\ &= (x^2 - 1)((x^2)^{n-1} + \cdots + x^2 + 1) + x + 2 \end{aligned}$$

Como $x + 2$ tem grau 1, é o resto da divisão.

Pauta de Correção da Solução Alternativa 2:

- Escrever a fatoração de $y^n - 1$. [0,25]
- Desenvolver o polinômio na forma $q(x)(x^2 - 1) + x + 2$. [0,5]
- Concluir que $x + 2$ é o resto. [0,25]

Questão 08 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

Dados $a, n \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ ímpar, mostre que:

(a) se $\dfrac{a^n - 1}{2}$ é par então a é da forma $4k + 1$ ou n é par.

(b) se a é da forma $4k + 1$ ou n é par, então $\dfrac{a^n - 1}{2}$ é par.

Solução

Solução (a)

Suponha que $\dfrac{a^n-1}{2}$ é par e que a não é da forma $4k+1$.

Temos que $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$, com k inteiro, logo $a^n = 4k+1$.

Como a é ímpar temos que a é da forma $4k+3$.

Considerando que

$$(4k_1+3)(4k_2+3) = 4k+1$$
$$(4k_1+1)(4k_2+1) = 4k+1$$
$$(4k_1+1)(4k_2+3) = 4k+3$$

concluímos que n é par.

Solução Alternativa (a):

Suponha que $\dfrac{a^n-1}{2}$ é par e que a não é da forma $4k+1$.

Segue que $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$, daí $a^n = 4k+1$ ou equivalentemente $a^n \equiv 1 \mod 4$.

Como a é ímpar, então $a \equiv 3 \equiv -1 \mod 4$.

Portanto n é par pois, caso contrário, teríamos $a^n \equiv -1 \mod 4$.

Solução (b)

Suponhamos que a é da forma $4k+1$. Como $(4k_1+1)(4k_2+1) = 4k+1$, concluimos que $a^n = 4k+1$, e daí $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$, portanto par.

Suponhamos n é par. Como a é ímpar temos que a é da forma $4k+3$.

Considerando que

$$(4k_1+3)(4k_2+3) = 4k+1$$
$$(4k_1+1)(4k_2+1) = 4k+1$$

concluimos que a^n é da forma $4k+1$. Portanto $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$ é par.

Solução Alternativa (b):

Suponhamos que a é da forma $4k+1$. Segue que $a \equiv 1 \mod 4$, daí $a^n \equiv 1 \mod 4$. Portanto, $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$ é par.

Suponhamos n par. Como a é ímpar temos que $a \equiv 1 \mod 4$ ou $a \equiv 3 \equiv -1 \mod 4$. Nos dois casos, $a^n \equiv 1 \mod 4$, portanto $\dfrac{a^n-1}{2} = 2k$ é par.

Pauta de Correção item (a):

- Supor a da forma $4k+3$ (ou n ímpar). [0,25]
- Concluir n par (ou a é da forma $4k+1$). [0,25]

Pauta de Correção item (b):

- Concluir o resultado quando a da forma $4k+1$. [0,25]
- Concluir o resultado quando n par. [0,25]

Outra Solução:

Começamos escrevendo $\dfrac{a^n-1}{2} = \left(\dfrac{a-1}{2}\right)(a^{n-1}+\cdots+a+1)$.

Vamos, primeiramente, analisar a paridade de $\dfrac{a-1}{2}$.
Como a é impar, ele é da forma $4k+1$ ou $4k+3$.

Se $a=4k+1$, então $\dfrac{a-1}{2}=2k$ é par, enquanto que, se $a=4k+3$, então $\dfrac{a-1}{2}=2k+1$ é ímpar.

Agora, analisaremos a paridade de $a^{n-1}+\cdots+a+1$.

Sendo $a>2$ ímpar, temos que $a^{n-1},\ldots,a$ são ímpares.

Assim, se n é par então $a^{n-1}+\cdots+a+1$ é par.

Agora, se n é ímpar, então $a^{n-1}+\cdots+a+1$ é ímpar.

Finalmente, observando que $\dfrac{a^n-1}{2}$ é par se, e somente se,

$\dfrac{a-1}{2}$ é par ou $a^{n-1}+\cdots+a+1$ é par concluímos que

$\dfrac{a^n-1}{2}$ é par se, e somente se a é da forma $4k+1$ ou n é par.

Pauta de Correção:

- Escrever $\dfrac{a^n-1}{2} = \left(\dfrac{a-1}{2}\right)(a^{n-1}+\cdots+a+1)$. [0,25]
- Analisar corretamente a paridade de $\dfrac{a-1}{2}$. [0,25]
- Analisar corretamente a paridade de $a^{n-1}+\cdots+a+1$. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]