MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2017.1 – Gabarito

Questão 01 [1,25]

Determine as equações das duas retas tangentes à parábola de equação $y = x^2 - 2x + 4$ que passam pelo ponto $(2, -5)$.

Solução

A equação de uma reta tangente à parábola que passa pelo ponto $(2, -5)$ é caracterizada por $y = m(x-2) - 5$, onde m é a inclinação e o sistema seguinte possui solução única, isto é, a interseção da reta com a parábola possui um único ponto.

$$\begin{cases} y &= x^2 - 2x + 4 \\ y &= m(x-2) - 5 \end{cases}$$

Assim, $x^2 - 2x + 4 = m(x-2) - 5$, donde $x^2 - (2+m)x + 2m + 9 = 0$. O sistema terá uma única solução se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Calculando $\Delta = (2+m)^2 - 4(2m+9) = m^2 - 4m - 32$, obtemos $\Delta = 0$ se, e somente se, $m = 8$ ou $m = -4$.

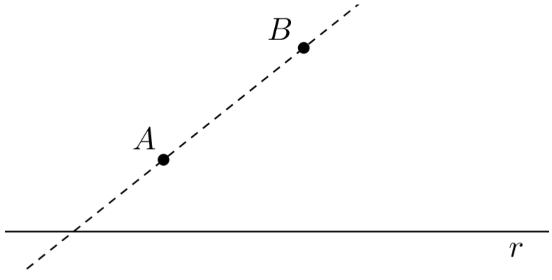
Portanto, $y = 8x - 21$ e $y = -4x + 3$ são as equações pedidas.

Pauta de Correção:

- Escrever a equação de uma reta passando por $(2, -5)$. [0,25]
- Caracterizar a reta tangente. [0,25]
- Concluir que o sistema tem solução única se, e somente se, $\Delta = 0$. [0,25]
- Determinar as duas equações. [0,5]

Questão 02 [1,25]

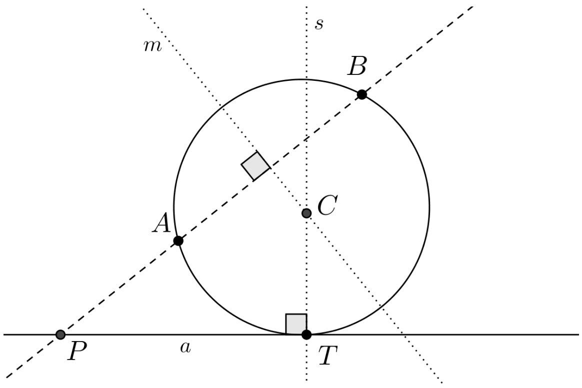
Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente à reta r e contendo os pontos A e B da figura abaixo.



Observação: Considere conhecidas as construções, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento, da média geométrica de dois segmentos e da perpendicular a um segmento passando por um ponto dado. Estas construções podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

Solução

Vamos supor o problema resolvido:



Para construir o círculo, precisamos construir, primeiramente, seu centro C. Este centro estará na interseção da mediatriz do segmento AB com a reta perpendicular a r e passando pelo ponto T de tangência entre r e o círculo. Com isso, se soubermos determinar o ponto T, o problema poderá ser facilmente resolvido.

Sendo P o ponto de interseção entre r e a reta que passa por A e B, sabemos que

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2,$$

logo, $\overline{PT}$ é a média geométrica dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$. Com isso, podemos fazer a seguinte construção:

1. Marcamos o ponto P de interseção entre as retas da figura e construímos o círculo de centro P e raio a, onde a é a média geométrica dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (esta construção pode, segundo o enunciado, ser feita sem maiores detalhes).
2. Tomamos o ponto T na interseção entre r e o círculo do passo anterior, de forma que TPA seja agudo.
3. Traçamos a reta s, perpendicular a r e passando por T (segundo o enunciado, esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).
4. Traçamos a reta m, mediatriz de AB (esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).
5. Marcamos o centro C do círculo na interseção entre m e s.
6. Construímos o círculo de centro C e raio CA.

Pauta de Correção:

- Indicar (mesmo que apenas em uma figura) que o centro do círculo está na mediatriz de AB e na reta perpendicular a r passando por T, ou seguir claramente uma estratégia que utiliza este fato. [0,25]
- Considerar a média geométrica entre os segmentos PA e PB. [0,25]
- Tomar o ponto T de forma que PT seja a média geométrica entre os segmentos PA e PB. [0,5]
- Finalizar a construção do círculo, tomando o centro na mediatriz de AB e na perpendicular a r passando por T. [0,25]

Questão 03 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Prove que um número inteiro positivo n possui uma quantidade ímpar de divisores positivos se, e somente se, é um quadrado perfeito.

(b) Sejam a e b números inteiros positivos com $(a, b) = 1$. Prove que, se ab é um quadrado perfeito, então a e b são quadrados perfeitos.

Solução

(a) Pelo teorema fundamental da aritmética, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ sendo $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ números primos e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ números inteiros positivos. A quantidade de divisores de n é dado por

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

(i) Se n tem um número ímpar de divisores, então todos os fatores de $d(n)$ são números ímpares, ou seja, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ são números pares. Portanto

$$n = \left(p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} \right)^2.$$

(ii) Por outro lado, se n é um quadrado perfeito, então $n = c^2$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Isto implica que todos os α_i são números pares e então $d(n)$ é ímpar, por ser o produto de ímpares.

(b) Sejam $a = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdots a_s^{\beta_s}$ e $b = b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdots b_t^{\gamma_t}$ a decomposição destes números em fatores primos distintos. O fato de $(a, b) = 1$ implica que a e b não tem fator primo comum. Portanto a decomposição de ab em fatores primos é

$$ab = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdots a_s^{\beta_s} \cdot b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdots b_t^{\gamma_t}$$

Como ab é um quadrado perfeito, pelo item (a) a quantidade de divisores de ab é um número ímpar, isto é,

$$d(ab) = (\beta_1 + 1) \cdot (\beta_2 + 1) \cdots (\beta_s + 1) \cdot (\gamma_1 + 1) \cdot (\gamma_2 + 1) \cdots (\gamma_t + 1)$$

é ímpar. Logo $d(a)$ é ímpar, $d(b)$ é ímpar e novamente pelo item (a) os números a e b são quadrados perfeitos.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Supor que n tem uma quantidade ímpar de divisores e concluir que n é quadrado perfeito. [0,25]
- Supor que n é quadrado perfeito e concluir que n tem uma quantidade ímpar de divisores. [0,25]

Item (b)

- Escrever corretamente a decomposição em primos de ab, usando o fato $(a, b) = 1$. [0,25]
- Concluir que a e b são quadrados perfeitos. [0,5]

Solução alternativa para o item (b):

(b) Sejam $a = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdots a_s^{\beta_s}$ e $b = b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdots b_t^{\gamma_t}$ a decomposição destes números em fatores primos distintos. O fato de $(a, b) = 1$ implica que a e b não tem fator primo comum. Portanto a decomposição de ab em fatores primos é

$$ab = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdots a_s^{\beta_s} \cdot b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdots b_t^{\gamma_t}.$$

Como ab é um quadrado perfeito, os expoentes β_i e γ_j são todos pares. Logo as decomposições de $a = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdots a_s^{\beta_s}$ e $b = b_1^{\gamma_1} \cdot b_2^{\gamma_2} \cdots b_t^{\gamma_t}$ em fatores primos distintos têm expoentes pares. Portanto os números a e b são quadrados perfeitos.

Pauta de Correção:

Item (b)

- Escrever corretamente a decomposição de ab em primos distintos usando o fato de que $(a, b) = 1$. [0,25]
- Concluiur que a e b são quadrados perfeitos. [0,50]

Questão 04 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Uma permutação de n elementos é dita *caótica* quando nenhum elemento está na posição original. Por exemplo, $(2,1,4,5,3)$ e $(3,4,5,2,1)$ são permutações caóticas de $(1,2,3,4,5)$, mas $(3,2,4,5,1)$ não é, pois 2 está no lugar original. O número de permutações caóticas de n elementos é denotado por D_n.

(a) Determine D_4 listando todas as permutações caóticas de $(1,2,3,4)$.

(b) Quantas são as permutações de $(1,2,3,4,5,6,7)$ que têm exatamente três números em suas posições original?

Solução

(a) As permutações caóticas de $(1,2,3,4)$ são 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 e 4321.

(b) Primeiro escolhemos 3 números entre 1 e 7 que ficam na posição original, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras. Devemos fazer uma permutação caótica com as demais 4 posições, e isso pode ser feito de $D_4 = 9$ maneiras.

Portanto temos um total de $C_7^3 \cdot D_4 = 315$ permutações de $(1,2,3,4,5,6,7)$ que têm exatamente três números em suas posições originais.

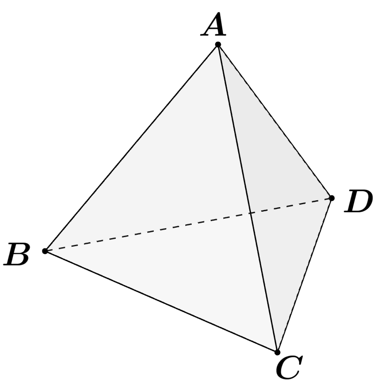
Pauta de Correção:

(a)
- Listar as 9 permutações caóticas de $(1,2,3,4)$. [0,5]
- Não listar todas as permutações caóticas de $(1,2,3,4)$ mas listar pelo menos 6, sendo todas as listadas caóticas. [0,25]

(b)
- Concluir que existem 35 modos de escolher os 3 números que ficarão na posição original. [0,25]
- Concluir que cada escolha dos 3 números fixados na posição original gera D_4 permutações caóticas. [0,25]
- Concluir a contagem $35 \cdot D_4$. $[0,25]$

Questão 05 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Um tetraedro $ABCD$ possui como base o triângulo equilátero BCD, cujos lados têm medida 1. Suas faces laterais são tais que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \ell$, com $B\hat{A}C = C\hat{A}D = B\hat{A}D = \alpha$.



(a) Expresse ℓ em função de α.

(b) Determine, em função de α, a medida da altura deste tetraedro traçada a partir de A.

Solução

(a) Considerando a face ABC, como $\ell = \overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BC} = 1$, temos, pela Lei do Cossenos,

$$1^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2 \cdot \ell \cdot \ell \cdot \cos\alpha,$$

que implica

$$2\ell^2(1 - \cos\alpha) = 1,$$

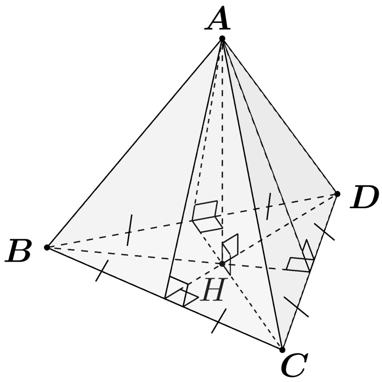
logo

$$\ell^2 = \frac{1}{2(1 - \cos\alpha)}.$$

Com isso,

$$\ell = \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos\alpha)}}.$$

(b) Como as faces ABC, ACD e ABD são triângulos isósceles de vértice A, as alturas relativas a A de cada uma dessas faces têm seus pés nos pontos médios de BC, CD e BD, respectivamente. Da mesma forma, as alturas da face BCD, que é um triângulo equilátero, têm pés nos mesmos pontos médios, como mostra a figura abaixo.



Assim, as projeções das arestas AB, AC e AD sobre a base estão sobre as alturas da base, de forma que H, pé da altura AH do tetraedro, esteja então no incentro/ortocentro/baricentro do triângulo equilátero BCD. Como a altura do triângulo BCD tem medida $\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{DH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, como AHB é retângulo em H, temos

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2,$$

logo

$$\overline{AH}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \ell^2,$$

que nos dá

$$\overline{AH}^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2(1 - \cos\alpha)}.$$

Com isso,

$$\overline{AH} = \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos\alpha)} - \frac{1}{3}},$$

que é a altura pedida

Pauta de Correção:

Item (a):

- Aplicar a lei dos cossenos. [0,25]

- Obter ℓ em função de α. [0,25]

Item (b):

- Obter a distância $\sqrt{3}/3$ entre um dos vértices da base (B, C ou D) e o pé H da altura pedida. [0,25]
- Considerar um dos triângulos retângulos ABH, ACH ou ADH. [0,25]
- Encontrar a altura correta. [0,25]

Questão 06 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

(a) Prove a relação de Stifel: para todos n e p inteiros positivos com $n \geqslant p$,

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros

$$\begin{cases} a_1 = C_2^2, \\ a_n = C_2^2 + \cdots + C_{n+1}^2, \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Mostre que $a_n = C_{n+2}^3$.

Solução

(a) Se $n = p$ obtemos $1 = 0 + 1$. Suponhamos então $n > p$.

Temos que

$$C_n^{p+1} + C_n^p = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!(n-p) + n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!)}$$

$$C_n^{p+1} + C_n^p = \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = C_{n+1}^{p+1}$$

(b) Para $n = 2$ temos $a_2 = C_2^2 + C_3^2 = 1 + 3 = C_4^3$, portanto a afirmação é verdadeira.

Suponhamos $a_n = C_{n+2}^3$, para n fixo, $n \geqslant 2$. Vamos provar que o resultado vale para $n+1$, isto é, $a_{n+1} = C_{n+3}^3$.

Temos que $a_{n+1} = a_n + C_{n+2}^2 = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2$ (hipótese de indução).

Agora, usando a relação de Stifel, obtemos

$$a_{n+1} = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2 = C_{n+3}^3$$

Portanto, pelo princípio de indução, o resultado é válido para todo $n \geqslant 2$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Provar a relação de Stifel. [0,5]

Item (b)

- Verificar o resultado para $n = 2$ (base da indução). [0,25]
- Supor o resultado válido para n e provar para $n+1$. [0,5]

Solução alternativa para o item (a) com argumento combinatório:

(a) Suponha que de um grupo de $n+1$ pessoas tenham que ser formada uma comissão com $p+1$ pessoas. Por definição de número binomial segue que o lado esquerdo da igualdade é uma solução possível para o problema. Por outro lado, fixemos uma pessoa, digamos P. Vamos considerar as comissões que contém P e as comissões que não contém P. O número de elementos do primeiro conjunto é igual a $y = C_n^p$, pois como P já faz parte, resta escolher p entre as demais n. Já, o número de comissões sem P é igual a $x = C_n^{p+1}$. Portanto segue o resultado.

Temos então que $x + y = C_{n+1}^{p+1}$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Encontrar x e y. [0,25]
- Concluir que $C_{n+1}^{p+1} = x + y$. [0,25]

Solução alternativa para o item (b):

(b) Pela relação de Stifel temos

$$
\begin{aligned}
C_4^3 &= C_3^3 + C_3^2 \\
C_5^3 &= C_4^3 + C_4^2 \\
C_6^3 &= C_5^3 + C_5^2 \\
&\vdots \\
C_{n+1}^3 &= C_n^3 + C_n^2 \\
C_{n+2}^3 &= C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2.
\end{aligned}
$$

Somando-se as igualdades acima, membro a membro, obtemos que

$$C_{n+2}^3 = C_3^3 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

Como $C_3^3 = C_2^2 = 1$ segue que

$$C_{n+2}^3 = C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

Pauta de Correção:

Item (b)

- Listar todas as igualdade de Stifel de 4 e $n+2$. [0,25]
- Somar termo a termo e concluir a igualdade. [0,50]

Questão 07 [**1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50**]

Uma função f é dita *crescente* em $X \subset \mathbb{R}$ se, para todos $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Sabendo que as funções $g(x) = x^a$ e $h(x) = b^x$ são crescentes em $[0, +\infty)$ para a e b reais com $a > 0$ e $b > 1$,

(a) prove que a função $F(x) = (1 + e^x)^{x^2+1}$ é crescente em $[0, +\infty)$;

(b) encontre as soluções não negativas da equação $(1 + e^x)^{x^2+1} = 2$.

Solução

(a) Suponha $x_1 < x_2$, onde $x_1, x_2 \in [0, \infty)$.
Como as funções $g(x) = x^a$ e $h(x) = b^x$ são crescentes em $[0, +\infty)$ para a e b reais com $a > 0$ e $b > 1$, tem-se que

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^a < x_2^a \text{ e } b^{x_1} < b^{x_2}$$

Assim, $x_1^2 < x_2^2$ (tomamos $a = 2$) e daí

$$x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$$

Concluimos, tomando $b = 1 + e^{x_1} > 1$, que

$$(1 + e^{x_1})^{x_1^2+1} < (1 + e^{x_1})^{x_2^2+1} \qquad (1)$$

Por outro lado, tomando $b = e > 1$, tem-se que $e^{x_1} < e^{x_2}$, logo $e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$. Agora, tomando $a = x_2^2 + 1$, concluimos que

$$(1 + e^{x_1})^{x_2^2+1} < (1 + e^{x_2})^{x_2^2+1} \qquad (2)$$

Usando as desigualdades (1) e (2) concluimos, pela transitividade, que

$$F(x_1) = (1 + e^{x_1})^{x_1^2+1} < F(x_2) = (1 + e^{x_2})^{x_2^2+1}$$

Portanto, a função F é crescente.

(b) Temos que a função $F(x) = (1 + e^x)^{x^2+1}$ é crescente , consequentemente é injetora. A equação $(1 + e^x)^{x^2+1} = 2$ é equivalente à $F(x) = 2 = F(0)$.
Portanto, $x = 0$ é a única solução não negativa.

Pauta de Correção:

(a)
- Concluir a desigualdade (1). [0,25]
- Concluir a desigualdade (2). [0,25]
- Concluir que a função é crescente. [0,25]

(b)
- Concluir que a função é injetiva. [0,25]
- Achar a solução única. [0,25]

Questão 08 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

(a) Sejam a, b, m números inteiros, com $m > 1$ e tais que $(a, m) = 1$. Prove que a congruência $ax \equiv 1 \mod m$ possui solução. Além disso, mostre que se $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ são soluções da congruência, então $x_1 \equiv x_2 \mod m$.

(b) Resolva a congruência $13x \equiv 1 \mod 2436$.

Solução

(a) Suponha $(a, m) = 1$. Segue que existem inteiros r, s tais que $a \cdot r + m \cdot s = 1$. Daí temos que $ar \equiv 1 \mod m$, portanto r é solução. Suponha agora que x_1, x_2 são soluções, isto é, $ax_1 \equiv 1 \mod m$ e $ax_2 \equiv 1 \mod m$. Segue que, $ax_1 \equiv ax_2 \mod m$, Como $(a, m) = 1$, concluimos que $x_1 \equiv x_2 \mod m$.

(b) Considere a congruência $13 \cdot x \equiv 1 \mod 2436$.

Calculando o $\text{mdc}(2436, 13)$ obtemos

	187	2	1	1	2
2436	13	5	3	2	1
5	3	2	1	0	

Portanto, $\text{mdc}(2436, 13) = 1$. Agora, usando o algoritmo euclidiano estendido, obtemos

$$13 \cdot 937 + 2436 \cdot (-5) = 1$$

Portanto, $x \equiv 937 \mod 2436$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Mostrar que a congruência tem solução. [0,25]
- Mostrar que duas soluções são congruentes módulo m. [0,25]

Item (b)

- Mostrar 13 e 2436 são primos entre si. [0,25]
- Achar a solução geral. [0,5]
- Achar apenas uma solução particular. [0,25]