ENQ – 2017.2 – Gabarito

Questão 01 **[1,25]**

Encontre as medidas dos lados e ângulos de dois triângulos ABC diferentes tais que $\overline{AC} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\widehat{B}C = 30°$.

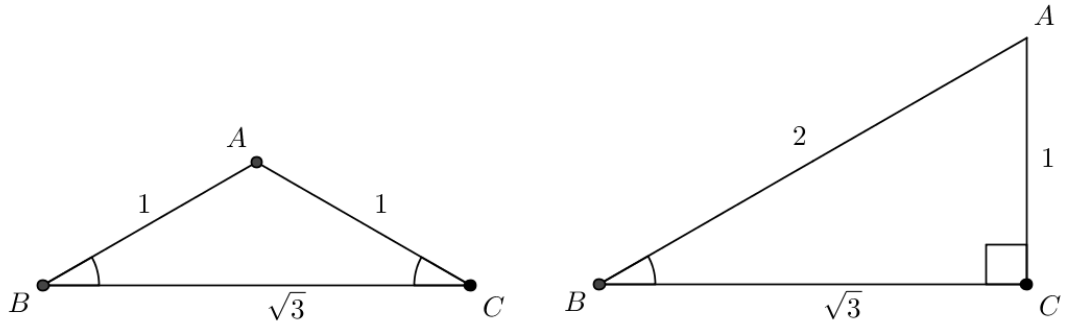
Solução

Considere $\overline{AC} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$, $A\widehat{B}C = 30°$ e $\overline{BA} = c$.

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos $1 = c^2 + 3 - 2\sqrt{3}c \cdot \cos 30° = c^2 + 3 - 3c$, ou seja, $c^2 - 3c + 2 = 0$. Logo $c = 1$ ou $c = 2$.

Para $c = 1$ obtemos um triângulo isósceles, logo $B\widehat{C}A = 30°$ e $B\widehat{A}C = 120°$.

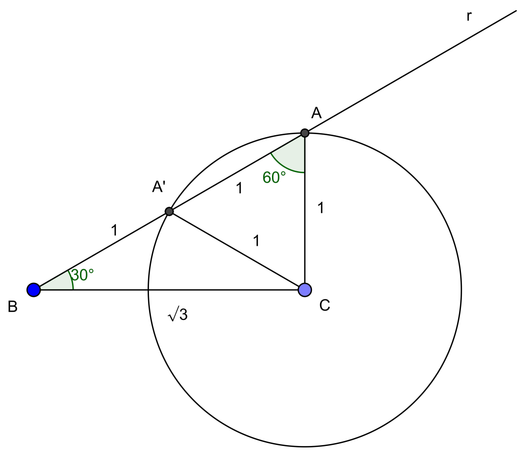
Para $c = 2$ temos $2^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$, logo obtemos um triângulo retângulo com $B\widehat{C}A = 90°$ e $C\widehat{A}B = 60°$. Para fins de ilustração, estes triângulos estão esboçados abaixo:



Pauta de Correção:

- Aplicar corretamente a lei dos cossenos. [0,25]
- Determinar os dois valores para a medida do lado AB. [0,50]
- Determinar as medidas dos ângulos no caso $\overline{AB} = 1$. [0,25]
- Determinar as medidas dos ângulos no caso $\overline{AB} = 2$. [0,25]

SOLUÇÃO ALTERNATIVA



Sejam $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e a reta r formando um ângulo de $30°$ com BC. A perpendicular ao segmento BC, traçada de C, intersecta r em um ponto, denotado por A.

No triângulo retângulo ABC, tem-se que $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\overline{BA}}$, donde $\overline{BA} = 2$.

Usando o teorema de Pitágoras, $(\sqrt{3})^2 + (\overline{AC})^2 = 2^2$, e daí $\overline{AC} = 1$. Assim obtemos um triângulo retângulo ABC, com $\overline{BA} = 2$, $\overline{AC} = 1$ e $B\widehat{A}C = 60°$.

Seja A' o ponto médio de BA, logo $\overline{BA'} = \overline{A'A} = 1$. Traçando a mediana CA' obtém-se o triângulo $A'AC$ isósceles com $A'\widehat{A}C = 60°$, logo um triângulo equilátero. Concluimos daí que $\overline{A'C} = 1$.
Consequentemente, o triângulo $A'BC$ é o outro triângulo pedido, com $B\widehat{A'}C = 120°$.

Pauta de Correção :

- Traçar a perpendicular CA e concluir que $\overline{AB} = 2$. [0,25]
- Determinar as medidas dos lados e ângulos do triângulo ABC. [0,25]
- Traçar a mediana relativa à hipotenusa AB e mostrar que o triângulo $A'AC$ é equilátero. [0,50]
- Encontrar as medidas dos lados e ângulos do triângulo $A'BC$. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Escreva a expressão de f na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$.

(b) Utilizando o item anterior, prove que, se $b^2 - 4ac \geqslant 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Solução

(a) Podemos fatorar a expressão de f como abaixo:

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\ .
\end{aligned}$$

(b) Utilizando o item anterior,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a} \\
&\Longleftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\underset{b^2 - 4ac \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Com isso, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Fazer corretamente o completamento de quadrados. [0,5]
- Concluir corretamente as expressões para m e k. [0,25]

(b)
- Observar que a expressão dentro da raiz é positiva. [0,25]
- Chegar corretamente à expressão final. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Considere as sequências p_n e q_n definidas recursivamente por $p_1 = q_1 = 1$,

$p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$, $q_{n+1} = 2p_nq_n$, para $n \geqslant 1$.

(a) Prove que $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, para $n \geqslant 2$.

(b) Use o item (a) para concluir que as frações $\dfrac{p_n}{q_n}$ são irredutíveis para todo $n \geqslant 2$.

Solução

(a) A afirmação é verdadeira para $n = 2$. De fato, $p_2 = p_1^2+2q_1^2 = 1+2 = 3$ e $q_2 = 2p_1q_1 = 2$, portanto $p_2^2-2q_2^2 = 3^2-2^3 = 1$. Suponha a afirmação verdadeira até um certo $k \geqslant 2$, isto é, $p_k^2 - 2q_k^2 = 1$ (hipótese de indução). Vamos provar que a afirmação é válida para $k+1$.

Considerando a recorrência, temos que

$$p_{k+1}^2 - 2q_{k+1}^2 = (p_k^2 + 2q_k^2)^2 - 2(2p_kq_k)^2 =$$

$$= p_k^4 + 4p_k^2q_k^2 + 4q_k^4 - 8p_k^2q_k^2 = p_k^4 - 4p_k^2q_k^2 + 4q_k^4 = (p_k^2 - 2q_k^2)^2$$

Usando a hipótese de indução, concluímos que

$$p_{k+1}^2 - 2q_{k+1}^2 = (p_k^2 - 2q_k^2)^2 = 1.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, para $n \geqslant 2$.

(b) Seja d o máximo divisor comum entre p_n e q_n. Como $d \mid p_n$ e $d \mid q_n$, então $d \mid p_n^2 - 2q_n^2$. Usando o item (a) obtemos que $d \mid 1$, o que nos mostra que $d = 1$.

Pauta de Correção:

(a)
- Provar a afirmação para $n = 2$. [0,25]
- Supor a afirmação válida para $n = k$ e provar para $n = k + 1$. [0,5]

(b)
- Provar que $(p_n, q_n) = 1$. [0,5]

Questão 04 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)= 0,75]**

Uma técnica simples para calcular o quadrado de um número natural N, representado no sistema decimal, cujo algarismo das unidades é igual a 5 é a seguinte:

(i) O algarismo das dezenas de N^2 será 2 e o das unidades será 5, ou seja, N^2 "termina"em 25.

(ii) Para determinar os algarismos antecedentes a 25 em N^2, considere o número a obtido pela retirada do algarismo 5 (algarismo das unidades) do número N que se quer elevar ao quadrado e multiplique pelo seu sucessor $a+1$. Assim, os algarismos do número $a \times (a+1)$ serão os algarismos que antecedem o 25.

Por exemplo: $35^2 = \underline{12}25$, pois $3 \times 4 = 12$; $195^2 = \underline{380}25$, pois $19 \times 20 = 380$.

(a) Use a técnica acima para calcular 705^2 e 9995^2.

(b) Prove a validade desse resultado.

Solução

(a) Tem-se que $705^2 = 497025$, pois $70 \times 71 = 4970$ e $9995^2 = 99900025$, pois $999 \times 1000 = 999000$.

(b) Considere um número N, representado no sistema decimal, cujo algarismo das unidades é 5:

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + 5$$

Tem-se que

$$N = \underbrace{(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1)}_{a} \cdot 10 + 5 = 10a + 5$$

onde a é o número formado por todos os algarismos, exceto o algarismo 5. Segue daí que

$$N^2 = (10a+5)^2 = (10a)^2 + 2 \times 10a \times 5 + 5^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a \times (a+1) \times 100 + 25$$

Portanto, N^2 é o número terminado em 25 e os demais algarismos são obtidos pela multiplicação $a \times (a+1)$.

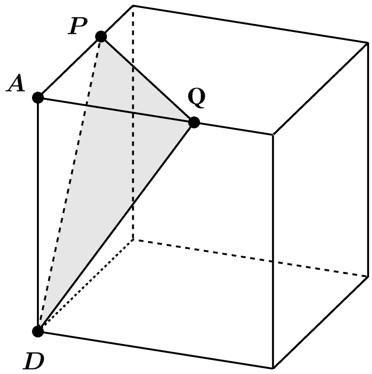
Pauta de Correção:

(a)
- Calcular 705^2, usando a técnica. [0,25]
- Calcular 9995^2, usando a técnica. [0,25]

(b)
- Escrever $N = a \cdot 10 + 5$. [0,25]
- Calcular N^2 e concluir o resultado. [0,5]

Questão 05 [**1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50**]

Um cubo de aresta de medida 3 é intersectado por um plano, determinando o triângulo DPQ, como mostra a figura a seguir:



Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$.

(a) Calcule a área do triângulo DPQ.

(b) Determine a distância do vértice A do cubo ao plano que contém o triângulo DPQ.

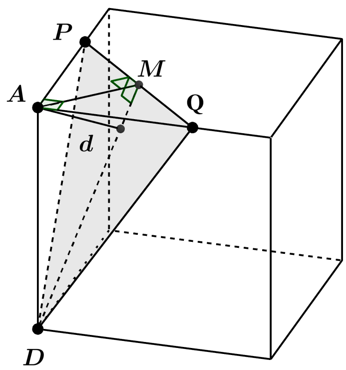
Solução

(a) Como $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$ e como PAQ é um triângulo retângulo, temos

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

logo $\overline{PQ} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Como os triângulos DAQ e DAP são congruentes (caso LAL), tem-se $\overline{DP} = \overline{DQ}$, logo o triângulo DPQ é isósceles de vértice D. Tomando o ponto médio M do lado PQ deste triângulo, tem-se então que DM é a altura de DPQ relativa a PQ.



Como o triângulo APQ é isósceles de vértice A, temos também que AM é altura de APQ, logo $A\hat{M}P = 90°$. Com isso,

$$\overline{AM} \cdot \overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ},$$

logo

$$\overline{AM} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2,$$

e, com isso,

$$\overline{AM} = \sqrt{2}.$$

O triângulo DAM é retângulo, logo

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AM}^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 = 11.$$

Com isso, $\overline{DM} = \sqrt{11}$ e

$$\text{Área}(DPQ) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{22}.$$

(b) Sendo d a distância do vértice A ao plano que contém o triângulo DPQ, o volume V do tetraedro $DPQA$ pode ser calculado de duas formas:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(DPQ) \cdot d,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(APQ) \cdot \overline{DA}$$

(na primeira, tomamos DPQ como base e, na segunda, APQ).

Com isso,

$$\text{Área}(DPQ) \cdot d = \text{Área}(APQ) \cdot \overline{DA}.$$

Como $\text{Área}(DPQ) = \sqrt{22}$ e

$$\text{Área}(APQ) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

temos

$$\sqrt{22} \cdot d = 2 \cdot 3,$$

logo

$$d = \frac{6}{\sqrt{22}}.$$

Pauta de Correção:

Item (a):

- Considerar o ponto M. [0,25]
- Calcular $\overline{DM} = \sqrt{11}$. [0,25]
- Obter o valor correto para a área de PDQ. [0,25]

Item (b):

- Calcular o volume do tetraedro $DPQA$. [0,25]
- Utilizar o volume calculado para obter a distância procurada. [0,25]

Solução Alternativa do Item (b):

O segmento d é a altura do triângulo retângulo DAM. Os catetos medem $\overline{DA} = 3$, $\overline{AM} = \sqrt{2}$, e a hipotenusa mede $\overline{DM} = \sqrt{11}$. Calculando a área de duas formas diferentes, obtemos a relação:

$$\overline{DM} \cdot d = \overline{DA} \cdot \overline{AM},$$

chegamos a $\sqrt{11}d = 3\sqrt{2}$, o que nos leva a $d = \dfrac{3\sqrt{22}}{11} = \dfrac{6}{\sqrt{22}}$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa do Item (b):

- Identificar d como a altura do triângulo retângulo ADM. [0,25]
- Utilizar qualquer relação métrica para calcular d. [0,25]

Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Sejam a, b números inteiros e p um número primo. Prove que:

(a) se $p \mid a^p - b^p$, então $p \mid a - b$.

(b) se $p \mid a^p - b^p$, então $p^2 \mid a^p - b^p$.

Solução

(a) Suponha que $p \mid a^p - b^p$. Como p é primo, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $p \mid a^p - a$ e $p \mid b^p - b$, logo $p \mid a^p - b^p - (a - b)$. Agora, como $p \mid a^p - b^p$, concluímos que $p \mid a - b$.

(b) Suponha que $p \mid a^p - b^p$. Segue que, usando o item (a), $p \mid a - b$, ou equivalentemente, $a \equiv b \bmod p$. Então temos que $a^n \equiv b^n \bmod p$, para todo n natural.

Daí,

$$a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + ab^{p-2} + b^{p-1} \equiv b^{p-1} + b^{p-2}b + \cdots + bb^{p-2} + b^{p-1} \equiv pb^{p-1} \equiv 0 \bmod p$$

Como $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + ab^{p-2} + b^{p-1})$ e os dois fatores são divisíveis por p, concluímos que $p^2 \mid a^p - b^p$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Usar o Pequeno Teorema de Fermat. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Item (b)

- Decompor $a^p - b^p$ e usar o item (a) para concluir que p divide um dos fatores. [0,25]
- Provar que p divide o outro fator. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 07 **[1,25]**

Resolva a equação de recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ $(n \geqslant 0)$, $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Solução

A equação característica associada a F_n é $r^2 - r - 1 = 0$ cujas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar C_1 e C_2 usamos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} F_0 = C_1 + C_2 = 0 \\ F_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e assim:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Pauta de Correção:

- Escrever a equação característica. [0,25]
- Achar as raízes da equação característica. [0,25]
- Escrever a fórmula explícita $F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. [0,25]
- Atribuir dois valores para n e montar um sistema. [0,25]
- Resolver o sistema. [0,25]

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Considere a função real definida por $f(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$.

(a) Determine $\alpha \in [0, 2\pi]$ para que f possa ser escrita na forma $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x + \alpha)$.

(b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) = 2$.

Solução

(a) Desenvolvendo a expressão $2\,\mathrm{sen}(x+\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}(x+\alpha) &= 2\left[\mathrm{sen}(x)\cos(\alpha) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(x)\right] \\ &= 2\cos(\alpha)\ \mathrm{sen}(x) + 2\,\mathrm{sen}(\alpha)\ \cos(x). \end{aligned}$$

Assim, para que $2\,\mathrm{sen}(x+\alpha)$ seja igual a $f(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$, é necessário e suficiente que

$$2\cos(\alpha) = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad 2\,\mathrm{sen}(\alpha) = 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Esta igualdade é satisfeita, para $\alpha \in [0, 2\pi]$, tomando-se $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

(b) Pelo item (a),

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) = 2 &\iff 2\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \\ &\iff \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ &\iff x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pauta de Correção:

(a)
- Usar a fórmula do seno da soma de arcos. $[0,25]$
- Concluir que $\alpha = \pi/6$. $[0,25]$

(b)
- Usar o item (a) e reescrever a equação. $[0,25]$
- Chegar à solução da equação. $[0,5]$

Solução Alternativa para o Item (b):

Podemos reescrever a equação na forma $\sqrt{3}\ \mathrm{sen}(x) = 2 - \cos(x)$.

Elevando os dois lados ao quadrado temos que $3\ \mathrm{sen}^2(x) = (2 - \cos(x))^2$, ou seja, $3\ \mathrm{sen}^2(x) = 4 - 4\cos(x) + \cos^2(x)$. Pela relação fundamental $\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1$, segue que $3(1 - \cos^2(x)) = 4 - 4\cos(x) + \cos^2(x)$.

Assim temos a equação $4\cos^2(x) - 4\cos(x) + 1 = 0$. Fazendo $\cos(x) = t$ obtemos a equação do segundo grau $4t^2 - 4t + 1 = 0$, cuja solução é $t = \dfrac{1}{2}$.

Logo temos que resolver a equação $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ que tem como soluções $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como as funções seno e cosseno são 2π-periódicas, podemos testar apenas $x = \dfrac{\pi}{3}$ e $x = -\dfrac{\pi}{3}$ na equação original.

Sabemos que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Substituindo na equação $\sqrt{3}\,\operatorname{sen}(x) = 2 - \cos(x)$ vemos que $x = \dfrac{\pi}{3}$ é solução e que $x = -\dfrac{\pi}{3}$ **não** é solução.

Portanto as soluções em $\mathbb{R}$ são dadas por $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa para o Item (b):

- Encontrar a equação em $\cos(x)$ e fazer a substituição $t = \cos(x)$. [0,25]
- Resolver a equação em t e encontrar os possíveis valores de x. [0,25]
- Concluir quais são as soluções corretas da equação. [0,25]