MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2018.1 – Gabarito

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Isótopos radioativos de um elemento químico estão sujeitos a um processo de decaimento radioativo. Com o passar do tempo, uma amostra de tais isótopos vai se desintegrando, isto é, emitindo radiação e se transformando em uma amostra de átomos mais estáveis.

Sabe-se que este decaimento é de tipo exponencial, isto é, denotando por $m(t)$ a massa de um determinado isótopo radioativo no instante t, tem-se

$$m(t) = m_0 \cdot b^t,$$

para algum $0 < b < 1$, sendo $m_0 > 0$ a massa inicial. A *meia vida* deste isótopo, denotada T, é o tempo necessário para que a massa m se reduza à metade de seu valor inicial.

(a) Determine b em função de T.

(b) Determine, em função de T, o tempo necessário para que m se reduza a um terço de seu valor inicial.

Solução

(a) Considere t_0 o tempo inicial, isto é, $m(t_0) = m_0$. Segue que $m_0 \cdot b^{t_0} = m_0$, logo $t_0 = 0$.

Se T é o tempo necessário para que caia à metade a massa m de uma amostra de isótopos radioativos, a partir do instante $t_0 = 0$, temos

$$m(T) = \frac{m_0}{2},$$

logo,

$$m_0 \cdot b^T = \frac{m_0}{2};$$

com isso,

$$b^T = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}.$$

Uma outra forma de escrever a última relação acima é $b = 2^{-\frac{1}{T}}$.

(b) Seja t o tempo necessário para que a massa de uma amostra decaia a um terço. Temos que

$$m(t) = \frac{m_0}{3},$$

logo,

$$m_0 \cdot b^t = \frac{m_0}{3};$$

portanto,

$$b^t = \frac{1}{3}$$

e, com isso,

$$\left(2^{-\frac{1}{T}}\right)^t = \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$2^{-\frac{t}{T}} = 3^{-1}$$

ou, ainda,

$$2^{\frac{t}{T}} = 3.$$

Finalmente,

$$\frac{t}{T} = \log_2 3,$$

de sorte que

$$t = T \cdot \log_2 3.$$

Assim, o tempo necessário para que a massa de uma amostra decaia a um terço é $T \cdot \log_2 3$.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever a equação $m(T) = \frac{m_0}{2}$. [0,25]
- Obter $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$ ou $b = 2^{-\frac{1}{T}}$. [0,25]

(b)
- Escrever a equação $m(t) = \frac{m_0}{3}$. [0,25]
- Obter $2^{\frac{t}{T}} = 3$ ou $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \dfrac{1}{3}$. [0,25]
- Obter $t = T \cdot \log_2 3$, ou algum valor equivalente. [0,25]

Questão 02 [**1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,75; (c)=0,25**]

O objetivo deste problema é encontrar o número natural x, menor do que 1700 e que deixe restos 2, 2, 1 e 0 quando dividido por 5, 6, 7 e 11, respectivamente. Para tanto, faça os itens a seguir:

(a) Escreva um sistema de congruências que tenha x como uma solução.

(b) Determine a solução geral do sistema do item (a).

(c) A partir da solução geral do sistema, calcule o valor de x.

Solução

(a) Temos que $0 < x < 1700$ é uma solução do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} X \equiv & 2 \pmod 5 \\ X \equiv & 2 \pmod 6 \\ X \equiv & 1 \pmod 7 \\ X \equiv & 0 \pmod{11} \end{cases}$$

(b) Como $5, 6, 7, 11$ são coprimos dois a dois, usaremos o Teorema Chinês dos Restos para determinar a solução geral do sistema.

Tomamos $M = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$, $M_1 = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462$, $M_2 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, $M_3 = 5 \cdot 6 \cdot 11 = 330$ e $M_4 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

Continuando, pondo $m_1 = 5, m_2 = 6, m_3 = 7, m_4 = 11, c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 1$ e $c_4 = 0$, temos que a solução geral do sistema é dada por

$$X \equiv M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 + M_3 y_3 c_3 + M_4 y_4 c_4 \pmod M,$$

onde cada y_i é solução de $M_i \cdot y \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Como $c_4 = 0$ precisaremos determinar apenas y_1, y_2 e y_3 onde

$$\begin{cases} 6 \cdot 7 \cdot 11 y_1 \equiv & 1 \pmod 5 \\ 5 \cdot 7 \cdot 11 y_2 \equiv & 1 \pmod 6 \\ 5 \cdot 6 \cdot 11 y_3 \equiv & 1 \pmod 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y_1 \equiv & 1 \pmod 5 \\ y_2 \equiv & 1 \pmod 6 \\ y_3 \equiv & 1 \pmod 7 \end{cases}$$

Portanto, $y_1 = 3, y_2 = y_3 = 1$ e, assim,

$$X \equiv 462 \cdot 3 \cdot 2 + 385 \cdot 1 \cdot 2 + 330 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 3872 \pmod{2310}.$$

(c) Temos que X= 3872 +2310 t, com $t \in \mathbb{Z}$. Como $0 < x < 1700$, obtemos $x = 3872 - 2310 = 1562$ como única solução.

Pauta de Correção:

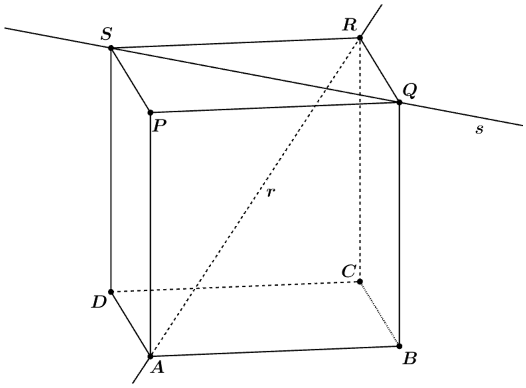
(a) Escrever o sistema. [0,25]

(b) Determinar a solução geral. [0,75]

(c) A partir da solução geral, obter o valor de x. [0,25]

Questão 03 [1,25]

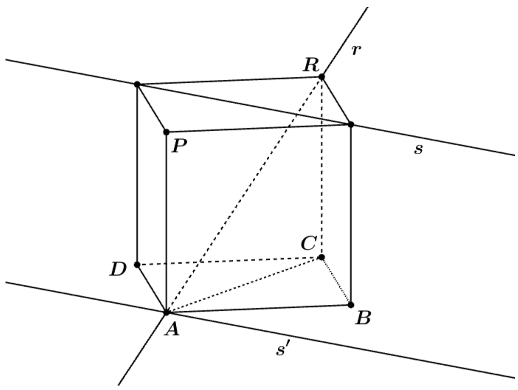
Dadas duas retas reversas r e s no espaço, definimos o *ângulo entre* r *e* s como o sendo o menor ângulo entre r e s', onde s' é qualquer reta paralela a s e concorrente com r. Pode-se provar que este ângulo não depende da reta s' escolhida. Na figura abaixo, as retas reversas r e s são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.



Calcule, de acordo com a definição acima, o cosseno do ângulo entre r e s.

Solução

De acordo com a definição relembrada no enunciado, precisamos determinar o ângulo entre r e s', com s' paralela a s e concorrente com r. Ainda de acordo com o enunciado, pode-se escolher qualquer reta s' com tais propriedades. Vamos, então, tomar s' como sendo a paralela a s que concorre com r em um dos vértices do cubo, que chamaremos de A, conforme a figura abaixo.



Note que s' é perpendicular a AP, pois está contida no plano da face da base do cubo, que é perpendicular à aresta vertical AP. Além disso, como s é paralela à diagonal BD da face $ABCD$ do cubo, s' também é paralela a BD; por fim, como BD é perpendicular a AC, s' é também perpendicular a AC.

Assim, como s' é perpendicular a (ACP), que é o mesmo plano (ACR), que por sua vez contém r. Logo, s' é perpendicular a r e, com isso, o cosseno do ângulo do ângulo entre as retas é 0.

Pauta de Correção:

- Considerar a reta s', ou alguma outra paralela a s concorrente com r, ou ainda alguma reta paralela a r e concorrente com s. [0,25]
- Concluir corretamente que s' é perpendicular a AC. [0,25]
- Concluir corretamente que s' é perpendicular ao plano (ACR). [0,25]
- Concluir que s' é perpendicular a r. [0,25]
- Calcular o cosseno. [0,25]

Solução Alternativa

Temos que s é perpendicular a PR, pois as diagonais de uma face do cubo são perpendiculares. Além disso, s está contida no plano da face $PQRS$ e AP é perpendicular a esta face, logo s é perpendicular a AP. Com isso, s é perpendicular ao plano que contém o quadrilátero $ACRP$. Então, s é ortogonal a toda reta em $ACRP$, logo, ortogonal a r. Assim, sendo E o ponto em que s intersecta $ACRP$ e r' a paralela a r passando por E, temos que s e r' formam um ângulo de $90°$ uma com a outra.

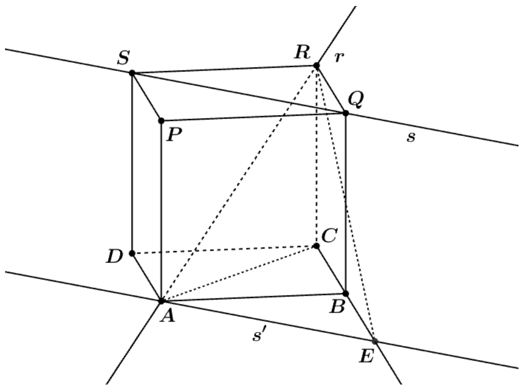
Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Mostrou que s é ortogonal é AP. [0,25]
- Mostrou que s é ortogonal é $ACRP$. [0,25]
- Mostrou que s é ortogonal a r. [0,25]
- Considerou a reta r' e mostrou que o ângulo entre s e r' é de $90°$. [0,25]
- Calcular o cosseno. [0,25]

Solução Alternativa (por Lei dos Cossenos)

Denotamos por a a aresta do cubo. Prolongando a aresta CB do cubo, obtemos o ponto E na interseção deste prolongamento com s'. Vamos calcular $\cos\theta$, onde θ é a medida do ângulo $R\hat{A}E$.

Pelo caso LLL, os triângulos SPQ e DAB da figura abaixo são congruentes. Além disso, como s' é paralela a BD, e AD é paralelo a EB, o quadrilátero $AEBD$ será um paralelogramo. Com isso, $\overline{BE} = \overline{AD} = a$ e $\overline{AE} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$.



Temos ainda, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$\overline{RE}^2 = \overline{RC}^2 + \overline{CE}^2 = a^2 + (2a)^2,$$

logo $\overline{RE} = a\sqrt{5}$.

O triângulo RAE tem, então, lados de medidas $\overline{AR} = a\sqrt{3}$, $\overline{AE} = a\sqrt{2}$ e $\overline{RE} = a\sqrt{5}$.

Pela Lei dos Cossenos,

$$\overline{RE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AR}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AR} \cdot \cos\theta,$$

logo

$$5a^2 = 2a^2 + 3a^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos\theta,$$

e, então

$$0 = -2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos\theta.$$

Com isso, $\cos\theta = 0$ (e, portanto, o ângulo entre r e s' mede $90°$).

Pauta de Correção da Solução Alternativa (Lei dos Cossenos):

- Considerar a reta s'. [0,25]
- Obter o ponto E, interseção de s' com o prolongamento de BC. [0,25]
- Obter $\overline{RE} = a\sqrt{5}$. [0,25]
- Aplicar corretamente a Lei dos Cossenos. [0,25]
- Calcular o cosseno. [0,25]

Solução Alternativa (pelo Teorema das Três Perpendiculares)
Na figura que aparece na solução anterior, considerando α o plano que contém a face $ABCD$, temos $RC \perp \alpha$. Temos $BD \parallel s$, e $s \parallel s'$, logo $BD \parallel s'$. Por fim, como $AC \perp BD$ (pois ambos os segmentos são diagonais da face quadrada $ABCD$), temos então $AC \perp s'$.

Como $RC \perp \alpha$, $AC \subset \alpha$, $s' \subset \alpha$ e $AC \perp s'$, pelo Teorema das Três Perpendiculares, temos $AR \perp s'$, logo $r \perp s'$. Com isso, o ângulo entre r e s é reto e, portanto, o cosseno do ângulo entre r e r é 0.

Pauta de Correção da Solução Alternativa (Teorema das Três Perpendiculares):

- Considerar a reta s', ou alguma outra paralela a s concorrente com r, ou ainda alguma reta paralela a r e concorrente com s. $[0, 25]$
- Concluir corretamente que s' é perpendicular a AC. $[0, 25]$
- Concluir corretamente que RC é perpendicular ao plano α, da face $ABCD$. $[0, 25]$
- Utilizar o Teorema das Três Perpendiculares e concluir que s' é perpendicular a r. $[0, 25]$
- Calcular o cosseno. $[0, 25]$

Questão 04 [**1,25**]

Sejam (a_n) uma progressão aritmética e (b_n) a sequência definida por $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$, para todo $n \geqslant 1$. Mostre que (b_n) é uma progressão aritmética e calcule o primeiro termo e a razão de (b_n) em função do primeiro termo e da razão de (a_n).

Solução
Sejam a o primeiro termo e r a razão da progressão aritmética (a_n).

Então $a_k = a + (k-1)r$, para todo $k \geqslant 1$.

Além disso, para $n \geqslant 1$, temos que

$$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = [a+nr]^2 - [a+(n-1)r]^2 = a^2 + 2anr + (nr)^2 - \left[a^2 + 2a(n-1)r + (n-1)^2r^2\right] =$$

$$a^2 + 2anr + n^2r^2 - a^2 - 2anr + 2ar - n^2r^2 + 2nr^2 - r^2 = 2ar + 2nr^2 - r^2 =$$

$$2ar + r^2 + (n-1)(2r^2).$$

Logo (b_n) é uma progressão aritmética com primeiro termo $2ar + r^2$ e razão $2r^2$.

De fato, $b_1 = 2ar + r^2 + (1-1)(2r^2) = 2ar + r^2$ e, para $k \geqslant 1$, temos que

$$b_{k+1} - b_k = 2ar + r^2 + (k+1-1)(2r^2) - \left[2ar + r^2 + (k-1)(2r^2)\right] = 2r^2 \text{ e}$$

assim está provado o resultado.

Pauta de Correção:

- Determinar a expressão de (b_n). [0,25]
- Verificar que (b_n) é uma progressão aritmética. [0,5]
- Determinar o primeiro termo de (b_n). [0,25]
- Determinar a razão da progressão aritmética (b_n). [0,25]

Solução Alternativa

Sejam a o primeiro termo e r a razão da progressão aritmética (a_n).

Calculando a diferença de dois termos consecutivos da sequência (b_n) temos

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 - (a_{n+1}^2 - a_n^2),$$

onde $a_{n+2} = a_{n+1} + r$ e $a_{n+1} = a_n + r$. Logo,

$$b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + r)^2 - a_{n+1}^2 - [(a_n + r)^2 - a_n^2]$$

Fazendo as simplificações, obtemos

$$b_{n+1} - b_n = 2a_{n+1}r - 2a_n r = 2r(a_{n+1} - a_n) = 2r^2.$$

Portanto, (b_n) é uma progressão aritmética de razão $2r^2$.

Temos que $b_1 = a_2^2 - a_1^2 = (a_1 + r)^2 - a_1^2 = 2a_1 r + r^2 = 2ar + r^2$.

Portanto, o primeiro termo de (b_n) é igual a $2ar + r^2$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Considerar a diferença $b_{n+1} - b_n$. [0,25]
- Verificar que (b_n) é uma progressão aritmética. [0,5]
- Determinar o primeiro termo de (b_n). [0,25]
- Determinar a razão de (b_n). [0,25]

Questão 05 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

(a) Qual a probabilidade de duas pessoas escolhidas ao acaso terem nascido no mesmo dia da semana?

(b) Em um grupo de r pessoas $(2 \leqslant r \leqslant 7)$, qual a probabilidade de haver pelo menos duas delas que tenham nascido no mesmo dia da semana?

Observação: Suponha que a probabilidade de uma pessoa nascer em determinado dia da semana seja igual a $1/7$.

Solução

(a) Escolhidas duas pessoas, o número de pares possíveis dos dias da semana é igual $7 \times 7 = 49$. O número de casos favoráveis, são os pares em que os dias de nascimento da semana são os mesmos, ou seja, igual a 7. Logo a probabilidade pedida é igual a $\dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$.

Solução alternativa I

O número de pares possíveis em que duas pessoas nasceram em dias distintos da semana é igual a $7 \times 6 = 42$. Temos então que a probabilidade pedida é $p = 1 - \dfrac{42}{49} = \dfrac{1}{7}$.

Solução alternativa II

Escolhida uma pessoa, a probabilidade da outra ter nascido no mesmo dia da semana da primeira é $p = \dfrac{1}{7}$.

(b) O número de casos possíveis para r pessoas é igual a 7^r. O número de casos em que nenhuma das r pessoas nasceu no mesmo dia da semana, isto é, o número de casos desfavoráveis, é igual a $7 \times 6 \times \cdots \times [7 - (r-1)]$. Logo a probabilidade pedida é

$$p = 1 - \frac{7 \times 6 \times \cdots \times (7 - (r-1))}{7^r}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Determinar o cardinal do Espaço Amostral. [0,25]
- Determinar a probabilidade. [0,25]

(b)
- Determinar o cardinal do Espaço Amostral. [0,25]
- Determinar a probabilidade. [0,5]

Questão 06 [**1,25**]

Para cada $n \geqslant 0$ inteiro considere o número $C(n)$ obtido pela concatenação das potências de 2, com expoentes de 0 até n, conforme exemplificado na tabela abaixo:

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$C(n)$	1	12	124	1248	124816	12481632	$\cdots$

Mostre, por indução, que $C(n)$ é divisível por 2^n para todo $n \geqslant 0$.

Solução

Observemos primeiramente que

$C(1) = 12 = 10 + 2, C(2) = 124 = 12 \cdot 10 + 4, C(3) = 1248 = 124 \cdot 10 + 8, C(4) = 124816 = 1248 \cdot 10^2 + 16, C(5) = 124816 \cdot 10^2 + 32, C(6) = 12481632 \cdot 10^2 + 64, C(7) = 1248163264 \cdot 10^3 + 128, \ldots$.

De um modo geral,

$$C(n+1) = C(n) \cdot 10^s + 2^{n+1},$$

onde $s \geqslant 1$ é o número de algarismos da expansão decimal de 2^{n+1}.

Agora, por indução sobre n, para $n = 0$ temos que $2^0 \mid C(0)$.

Suponha que 2^n divide $C(n)$, para um certo $n \geqslant 0$.

Temos que $C(n+1) = C(n) \cdot 10^s + 2^{n+1}$, onde $s \geqslant 1$.

Como 2^n divide $C(n)$ e 2 divide 10^s, concluimos que 2^{n+1} divide $C(n) \cdot 10^s$, logo 2^{n+1} divide $C(n+1)$.

Portanto, $C(n)$ é divisível por 2^n para todo $n \geqslant 0$.

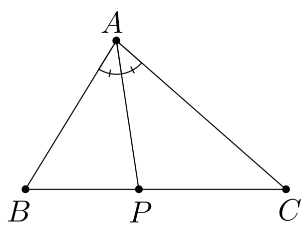
Pauta de Correção:

- Verificar que $C(n)$ é divisível por 2^n para $n = 0$. [0,25]
- Escrever $C(n+1) = C(n) \cdot 10^s + 2^{n+1}$. [0,25]
- Concluir que 2^{n+1} divide $C(n) \cdot 10^s$. [0,5]
- Concluir a prova. [0,25]

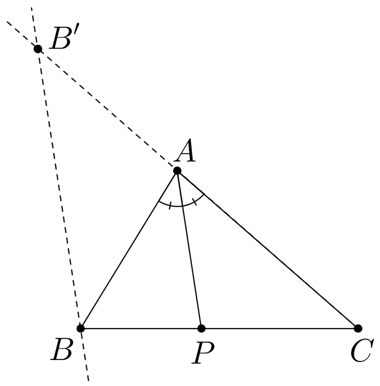
Questão 07 [**1,25**]

Seja ABC um triângulo. Se P é o pé da bissetriz interna relativa ao lado BC, prove o **Teorema da Bissetriz Interna**, isto é, que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$



Solução



Trace, pelo ponto B, a paralela à reta $\overleftrightarrow{AP}$ e marque seu ponto de interseção B' com a reta $\overleftrightarrow{AC}$.
Como $\overleftrightarrow{AP}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{B'B}$ e $\overline{AP}$ é bissetriz do $\angle BAC$ obtemos

$\angle ABB' = \angle BAPe\angle BB'A = \angle PAC$; como $\angle BAP = \angle PAC$, segue que $\angle BB'A = \angle ABB'$.

Portanto, o triângulo $B'AB$ é isósceles de base $B'B$, e assim $\overline{AB} = \overline{AB'}$.
Aplicando o teorema de Tales às paralelas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{B'B}$ obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Pauta de Correção:

- Traçar a paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ e mostrar a igualdade $\angle BB'A = \angle ABB'$. [0,5]
- Concluir que $\overline{AB} = \overline{AB'}$. [0,25]
- Aplicar o teorema de Tales. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,50]**

(a) Escreva $\cos(3x)$ em termos de $\cos(x)$.

(b) Mostre que, se um número racional irredutível $\dfrac{r}{s}$ (r e s inteiros não nulos primos entre si) é raiz de um polinômio $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ de coeficientes inteiros, então s divide a_n e r divide a_0.

(c) Use os itens acima para mostrar que $\cos(20°)$ é um número irracional.

Solução

(a)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cdot\cos x - \operatorname{sen}(2x)\cdot\operatorname{sen}x \\
&= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cdot\cos x - 2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}x \\
&= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x - 2\cdot\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x \\
&= \cos^3 x - 3\cdot\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x \\
&= \cos^3 x - 3\cdot(1 - \cos^2 x)\cdot\cos x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

(b) Suponha r e s como no enunciado, tais que $\dfrac{r}{s}$ é uma raiz racional irredutível do polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, isto é,

$$P\left(\frac{r}{s}\right) = a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando a igualdade por s^n, temos que

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_2 r^2 s^{n-2} + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0,$$

$$a_n r^n = -(a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 s^{n-3} + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}) s$$

e

$$a_0 s^n = -(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} s + \cdots + a_2 r s^{n-2} + a_1 s^{n-1}) r.$$

Segue que $s | a_n r^n$ e $r | a_0 s^n$ e, como, $(r, s) = 1$ concluímos que $s | a_n$ e $r | a_0$.

(c) Note que $60^o = 3 \cdot 20^o$.

Por um lado, $\cos 60^o = 1/2$; por outro, o item (a) fornece $\cos 60^o = 4\cos^3 20^o - 3\cos 20^o$.

Portanto, podemos afirmar que $\cos 20^o$ satisfaz à equação $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$, e então que é raiz do polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = 8x^3 - 6x - 1.$$

Pelo item (b), as (possíveis) raízes racionais de P devem pertencer ao conjunto $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$. Calculando as imagens de cada um desses números, temos

x	1	-1	1/2	-1/2	1/4	-1/4	1/8	-1/8
$P(x)$	1	-3	-3	1	-19/8	3/8	-111/64	-17/64

Portanto, $\cos 20^o$ não pode ser um número racional.

Pauta de Correção:

(a) Escrever $\cos(3x)$ em função de $\cos x$. [0,25]

(b)
- Concluir que $s | a_n r^n$ e $r | a_0 s^n$. [0,25]
- Usar o fato $(r, s) = 1$ e concluir que $s | a_n$ e $r | a_0$. [0,25]

(c)
- Usar o item (a) para obter $\cos 20°$ como raiz da polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$. [0,25]
- Usar o item (b) para concluir que $\cos 20°$ é um número irracional. [0,25]