MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2018.2 – Gabarito

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$. Mostre que $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$.

(b) Para quais valores de $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem-se que $a + 2 \mid a^4 + 2$?

Solução

(a) Temos que $a - b \mid a^n - b^n$, para todo n natural, pois
$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
Assim $a + b = a - (-b) \mid a^{2n} - (-b)^{2n} = a^{2n} - b^{2n}$.

(b) Usando o item (a), temos que $a + 2 \mid a^4 - 2^4 = a^4 - 16$.
Como $a^4 + 2 = (a^4 - 16) + 18$, segue que $a + 2 \mid a^4 + 2$, se se somente se, $a + 2 \mid 18$.
Assim $a + 2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ ou ± 18 , com $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, portanto
$a = 0, 1, 4, 7$ ou 16.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever que $a - b$ divide $a^n - b^n$. [0,25]
- Escrever que $a + b = a - (-b)$ divide $a^{2n} - b^{2n}$. [0,25]

(b)
- Escrever que $a^4 + 2 = (a^4 - 16) + 18$. [0,25]
- Concluir que $a + 2$ deve dividir 18. [0,25]
- Determinar todos os valores de a. [0,25]

Solução Alternativa para o Item (a)

Vamos provar por indução em n.

Para $n = 1$, temos $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, logo $(a + b) \mid a^2 - b^2$.

Suponha que o resultado é válido para $n = k$, isto é, $a^{2k} - b^{2k} = (a + b) \cdot q$. E considere

$$a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} = a^{2k} \cdot a^2 - b^{2k} \cdot b^2$$

Somando e subtraindo $a^{2k} \cdot b^2$ e, em seguida, usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} &= a^{2k} \cdot a^2 - a^{2k} \cdot b^2 + a^{2k} \cdot b^2 - b^{2k} \cdot b^2 \\ &= a^{2k} \cdot (a^2 - b^2) + (a^{2k} - b^{2k})b^2 \\ &= a^{2k} \cdot (a + b) \cdot (a - b) + (a + b) \cdot q \cdot b^2 \\ &= (a + b) \cdot [a^{2k} \cdot (a - b) + q \cdot b^2] \end{aligned}$$

Portanto está provado o resultado.

Pauta de Correção da Solução Alternativa do Item (a)

(a)
- Provar o caso $n = 1$. [0,25]
- Provar o caso geral. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Dados três pontos A, B e C não colineares, faça o que se pede tendo em vista que este é um problema de **Geometria Plana**.

(a) Descreva os passos de construção necessários para obter, utilizando régua e compasso, as duas retas r e s que contêm C, tais que r equidista de A e B, e s equidista de A e B.

(b) Justifique a construção anterior, isto é, explique porque os passos de construção descritos no item (a) fornecem realmente as retas procuradas.

Observação: Considere conhecidas as construções, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento e da paralela a um segmento passando por um ponto dado. Estas construções podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

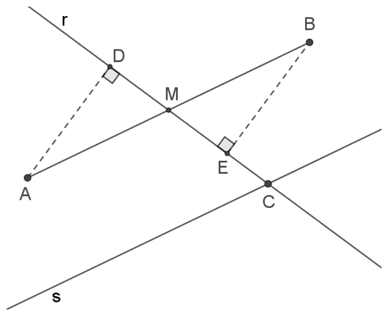
Solução

(a) Para obter a reta r que equidista de A e B e contém C:

1. Trace o segmento AB;
2. Trace a mediatriz m do segmento AB;
3. Marque o ponto M de interseção entre AB e m, que é o ponto médio de AB;
4. Trace a reta $\overleftrightarrow{CM}$, que é a reta r procurada.

Quanto à reta s, para obtê-la, basta traçar a reta paralela ao segmento AB e que contém C.

(b) Por construção, C pertence tanto a r quanto a s. Sendo s paralela ao segmento AB, equidista de todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, em particular dos pontos A e B. Resta então mostrar que r também equidista dos pontos A e B.



Para tanto, consideremos os pontos D e E, pés das perpendiculares baixadas a partir dos pontos A e B, respectivamente, até a reta r, conforme a figura. Agora podemos construir os triângulos AMD e BME, que são congruentes, pelo caso LAA_o, já que $A\hat{D}M$ e $B\hat{E}M$ são, por construção, ambos retos, $A\widehat{M}D$ e $B\widehat{M}E$ são opostos pelo vértice e os lados AM e BM são congruentes, uma vez que M é ponto médio de AB. Portanto, $\overline{AD} = \overline{BE}$, de modo que r equidista de A e B, como queríamos provar.

Pauta de Correção:

(a)
- Indicar que uma das retas é a reta s, paralela a AB passando por C. [0,25]
- Descrever corretamente os passos de construção da reta r. [0,25]

(b)
- Argumentar que s equidista de A e B porque equidista de todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. [0,25]
- Apresentar um argumento coerente provando que r equidista de A e B. [0,5]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Se r, s e t são as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, mostre que $r+s+t = -a$, $rs+rt+st = b$ e $rst = -c$.

(b) Se r, s e t são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = 0$, calcule o valor de $r^2 + s^2 + t^2$.

Solução

(a) Tem-se que $x^3+ax^2+bx+c = (x-r)(x-s)(x-t) = x^3-(r+s+t)x^2+(rs+rt+st)x-rst$, donde $r+s+t = -a$, $rs+rt+st = b$ e $rst = -c$.

(b) Usando o resultado do item (a), tem-se que $r+s+t = 4$ e $rs+rt+st = 5$. Segue que $(r+s+t)^2 = 16$, $r^2+s^2+t^2+2(rs+rt+st) = 16$, portanto $r^2+s^2+t^2 = 16-2\cdot 5 = 6$

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever o polinômio dado como $(x-r)(x-s)(x-t)$. [0,25]
- Comparar os coeficientes e concluir o resultado. [0,25]

(b)
- Aplicar o resultado do item (a) e obter as relações entre as raízes. [0,25]
- Calcular o valor de $r^2+s^2+t^2$. [0,5]

Questão 04 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Considere as funções $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pelas expressões abaixo:

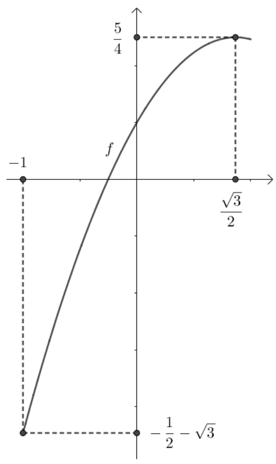
$$f(t) = -t^2 + \sqrt{3}\,t + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

(a) Encontre os valores máximo e mínimo de f e os valores reais t em que f assume tais valores.

(b) Encontre os valores máximo e mínimo de g e todos os valores reais x em que g assume tais valores.

Solução

(a) Como f é uma função quadrática, seu gráfico no intervalo $[-1,1]$ é um arco de parábola como ilustrado na figura abaixo.



A abscissa do vértice de uma parábola de equação $y = a\,t^2 + b\,t + c$, denotada por t_v, é dada pela fórmula $t_v = \dfrac{-b}{2a}$ e é o valor em que a função atinge seu valor máximo ou mínimo. No caso da função f, como a parábola tem a concavidade voltada para baixo (já que o coeficiente do termo quadrático é negativo), t_v representa o valor no qual essa função atinge seu valor máximo. Como $t_v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, então esse é o valor no qual a função assume seu valor máximo no intervalo. Para encontrar o valor máximo basta então calcular $f(t_v) = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$. Quanto ao valor mínimo, este será um dos extremos do intervalo fechado $[-1,1]$, uma vez que f é monótona crescente para $t < t_v$ e monótona decrescente para $t > t_v$. Como $f(-1) = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} < -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} = f(1)$, então a função atinge seu valor mínimo quando $t = -1$. Resumindo, os valores máximo e mínimo da função f são $\dfrac{5}{4}$ e $-\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}$, nessa ordem, e os valores de t em que a função assume esses valores são, respectivamente, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e -1.

(b) Utilizando a identidade trigonométrica $cos(2x) = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$ podemos reescrever a função g como $g(x) = -\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x + \frac{1}{2}$. Fazendo $\text{sen}\, x = t$ ficamos com $g(t) = -t^2 + \sqrt{3}\, t + \frac{1}{2}$, sendo que $-1 < t < 1$. Desse modo, temos que os valores máximo e mínimo de g são os mesmos encontrados no item (a) para a função f. Por outro lado, os valores de x tais que g assume seu valor máximo ou mínimo são, respectivamente, as soluções das equações trigonométricas $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\, x = -1$.

Assim, os valores máximo e mínimo de g são também $\frac{5}{4}$ e $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$, nessa ordem, e os valores de x em que a função assume esses valores são, respectivamente, os elementos dos conjuntos A e B dados por:

$A = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, com \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$B = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, com \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar o máximo e o mínimo de f. [0,25]
- Encontrar os valores t do domínio nos quais f assume seus valores máximo e mínimo. [0,25]

(b)
- Encontrar o máximo e o mínimo de g. [0,25]
- Encontrar os valores x do domínio nos quais g assume seus valores máximo e mínimo. [0,5]

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Considere a equação diofantina linear $5x + 3y = 2018$.

(a) Escreva a solução geral em $\mathbb{Z}$.

(b) Quantas soluções existem em $\mathbb{N} \cup \{0\}$?

Solução

(a) Temos que $5 \cdot (-1) + 3 \cdot (2) = 1$, logo $5 \cdot (-2018) + 3 \cdot (4036) = 2018$. Fazendo a divisão euclidiana de -2018 por 3, $-2018 = 3 \cdot (-673) + 1$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$5 \cdot (-3 \cdot 673 + 1) + 3 \cdot (4036) = 2018$$

$$5 \cdot (1) + 3 \cdot (4036 - 5 \cdot 673) = 2018$$

$$5 \cdot (1) + 3 \cdot (671) = 2018$$

Portanto, $x_0 = 1$ e $y_0 = 671$ é a solução minimal e a solução geral em $\mathbb{Z}$ é dada por

$$\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= 671 - 5t \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{Z}$.

(b) A solução geral em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ é dada por

$$\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= 671 - 5t \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $671 - 5t \geqslant 0$, logo $0 \leqslant t \leqslant 134$.

Portanto, existem 135 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar uma solução particular. $[0,25]$
- Encontrar a solução geral em $\mathbb{Z}$. $[0,25]$

(b)
- Escrever a solução geral em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. $[0,5]$
- Encontrar o número de soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. $[0,25]$

Solução Alternativa

(a) Temos que

$$3y = 2018 - 5x = 2016 - 3x + 2 - 2x = 3(672 - x) + 2(1 - x)$$
$$y = 672 - x + \frac{2(1-x)}{3}$$

Sendo x, y são inteiros, concluimos que $1 - x = 3t$, com $t \in \mathbb{Z}$. Daí, obtemos a solução geral em $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 671 + 5t \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{Z}$.

(b) Queremos soluções inteiras não negativas, logo $1 - 3t \geqslant 0$ e $671 + 5t \geqslant 0$.

Portanto, $-134 \leqslant t \leqslant 0$ e assim temos 135 soluções não negativas.

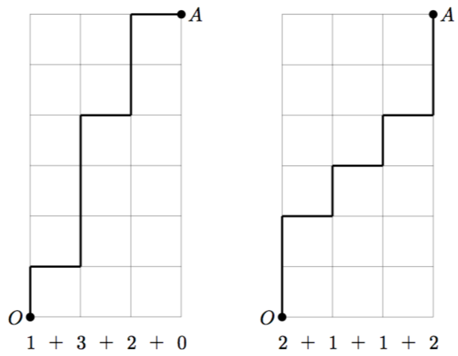
Pauta de Correção da Solução Alternativa:

(a)
- Encontrar a solução geral em $\mathbb{Z}$. $[0, 5]$

(b)
- Escrever a solução geral em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. $[0, 5]$
- Encontrar o número de soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. $[0, 25]$

Questão 06 [**1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,50**]

O método abaixo pode ser utilizado para para encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$, onde r e m são inteiros positivos dados.
Vamos aplicar o método para encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Representamos as soluções como quadras de números inteiros não negativos $(x_1, x_2, x_3, x_4), x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geqslant 0$. Uma estratégia que podemos usar para contar o número de soluções é representar cada uma delas num diagrama de quadras e ruas, contando todos os caminhos que vão do ponto O até o ponto A, sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita. Veja na figura abaixo a representação das soluções $(1, 3, 2, 0)$ e $(2, 1, 1, 2)$.
Note que em qualquer solução temos que subir 6 quadras e fazer 3 deslocamentos para a direita. Isso corresponde ao número de anagramas da "palavra" $SSSSSSDDD$. Portanto o número de soluções é igual a $\frac{9!}{6!3!} = 84$.



(a) Utilize o método indicado acima para calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$, onde m e r são inteiros positivos dados.

(b) Um mercado vende 5 tipos de frutas em caixas com 12 frutas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montadas?

(c) Se o mercado do item (b) resolver colocar pelo menos uma fruta de cada tipo em uma caixa, quantos tipos de caixas podem ser montadas?

Solução

(a) O número de soluções corresponde à quantidade de percursos num diagrama de quadras e ruas de O até A, em que subimos m quadras e nos deslocamos $r-1$ vezes para a direita, que é equivalente a contar a quantidade de anagramas da palavra $\underbrace{S\ldots S}_{m}\underbrace{D\ldots D}_{r-1}$ e isso é igual a $\dfrac{(m+r-1)!}{m!(r-1)!}$.

(b) Neste problema precisamos encontrar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$, onde cada x_i indica a quantidade de frutas de cada tipo. Pelo item (a) segue que esta quantidade é igual a $\dfrac{(12+5-1)!}{12!(5-1)!}=\dfrac{16!}{12!4!}=1820$.

(c) Agora resta escolher 7 frutas para completar a caixa e assim precisamos encontrar a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$ que é igual a $\dfrac{(7+5-1)!}{7!(5-1)!}=\dfrac{11!}{7!4!}=330$.

Pauta de Correção:

(a) Obter a solução da equação. [0,25]

(b)
- Escrever a equação que modela o problema. [0,25]
- Encontrar a solução da equação. [0,25]

(c)
- Escrever a equação que modela o problema. [0,25]
- Obter a solução da equação. [0,25]

Questão 07 **QstId=1349 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Duas esferas de raios r e R, com $r<R$, são tangentes interiores, isto é, possuem apenas um ponto em comum e o centro da esfera de raio r está no interior da esfera de raio R.

(a) Prove que o ponto de interseção das duas esferas é colinear aos centros destas esferas.

(b) Sabe-se que o centro da esfera menor é o ponto médio de uma das arestas de um tetraedro regular inscrito na esfera maior. Calcule r em função de R.

Dica: Sendo a a aresta do tetraedro, sabe-se que $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Solução

(a) Sejam O o centro da esfera de raio R, M o centro da esfera de raio r e P o ponto de interseção entre as esferas.

Supondo, por absurdo, que P, M e O não sejam colineares, temos um triângulo OPM. Tome o ponto Q, projeção de P sobre a reta OM, e P' tal que Q seja o ponto médio de PP'. Os triângulos OQP e OQP' serão congruentes pelo caso LAL, e, portanto, $\overline{OP'}=\overline{OP}=R$. Os triângulos MQP e MQP' também serão congruentes por LAL, logo $\overline{MP'}=\overline{MP}=r$. Com isso, ambos P e P' pertencem à interseção entre as duas esferas, contradizendo o fato de serem tangentes interiores.

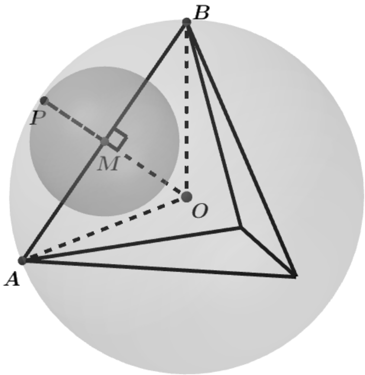
Solução Alternativa para o item(a):

Sejam O o centro da esfera de raio R, M o centro da esfera de raio r e P o ponto de interseção entre as esferas. O plano α, tangente em P à esfera de raio R, é perpendicular ao raio OP.

O plano α também é tangente à esfera de raio r em P. De fato, todos os pontos da esfera menor, exceto P, são interiores à esfera maior, e todos os pontos de α, exceto P, são exteriores à esfera maior. Assim, o único ponto de interseção entre α e a esfera menor é P.

Com isso, o raio MP da esfera de raio r é perpendicular a α no ponto P, logo é colinear ao raio OP da esfera de raio R. Com isso, O, M e P são colineares.

(b) Para que as esferas sejam tangentes interiores, o ponto P de interseção entre elas é colinear aos centros O e M destas esferas, como na figura abaixo.



Logo, $r = R - \overline{MO}$.

Sejam A e B as extremidades da aresta que contém o ponto M, centro da esfera menor. Como M é ponto médio de AB, $\overline{AM} = \frac{a}{2}$. Considerando o triângulo o AOB, que é isósceles, pois $\overline{AO} = \overline{AB} = R$, o ângulo $A\hat{M}O$ será reto. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras a AMO, temos

$$\overline{MO}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{AO}^2,$$

logo

$$\overline{MO}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2,$$

e, com isso,

$$\overline{MO}^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Como $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, temos $a = \frac{4R}{\sqrt{6}}$, e, portanto, $a^2 = \frac{16R^2}{6} = \frac{8R^2}{3}$. Com isso,

$$\overline{MO}^2 = R^2 - \frac{\frac{8R^2}{3}}{4} = R^2 - \frac{8R^2}{12} = R^2 - \frac{2R^2}{3} = \frac{R^2}{3},$$

logo $\overline{MO} = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Com isso,

$$r = R - \overline{MO} = R - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdot R.$$

Pauta de Correção:

(a) Provar corretamente, por qualquer pauta. [0,5]

(b)
- Indicar que há a estratégia de obter r fazendo $r = R - \overline{MO}$. [0,25]
- Concluir que o triângulo $A\hat{M}O$ é reto. [0,25]
- Encontrar r. [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere a recorrência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ e para $n > 0$,

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

(a) Determine o termo geral da recorrência.

(b) Quantos múltiplos de 7 há no conjunto $\{a_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 2018, n \in \mathbb{Z}\}$?

Solução

(a) A equação característica dessa recorrência é $r^2 - 5r + 6 = 0$, que tem soluções $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Logo a solução da recorrência é da forma

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

De $a_1 = 1$, temos que $2A + 3B = 1$ e de $a_2 = 5$ temos que $4A + 9B = 5$. Assim, $A = -1$ e $B = 1$, o que nos dá

$$a_n = 3^n - 2^n.$$

(b) Precisamos calcular, para qualquer inteiro n, o resto da divisão de $3^n - 2^n$ por 7, isto é, $3^n - 2^n \mod 7$ e verificar quantos valores n geram expressões congruentes a 0.

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, $3^6 \equiv 2^6 \equiv 1 \mod 7$, logo, $3^6 - 2^6 \equiv 0 \mod 7$ e além disso, se escrevemos $n = 6q + r$, temos que $3^n - 2^n \equiv 3^r - 2^r \mod 7$. Assim, para $r = 1, ..., 5$ temos

$$\begin{aligned}
a_1 = 3^1 - 2^1 &\equiv 1 \mod 7 \\
a_2 = 3^2 - 2^2 &\equiv 5 \mod 7 \\
a_3 = 3^3 - 2^3 &\equiv 5 \mod 7 \\
a_4 = 3^4 - 2^4 &\equiv 2 \mod 7 \\
a_5 = 3^5 - 2^5 &\equiv 1 \mod 7
\end{aligned}$$

Com isso podemos afirmar que a_n é múltiplo de 7 $\iff$ n é múltiplo de 6. Como $2018 = 6 \cdot 336 + 2$, concluímos que entre 1 e 2018, há 336 múltiplos de 6, logo no conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_{2018}\}$ há 336 múltiplos de 7.

Pauta de Correção:

(a)
- Exibir a equação característica e a forma geral da solução. [0,25]
- Utilizar os termos iniciais para encontrar os coeficientes A e B. [0,25]

(b)
- Provar que se n é múltiplo de 6, então a_n é múltiplo de 7. [0,25]
- Listar os casos $a_1, a_2, ..., a_5$. [0,25]
- Contar corretamente os múltiplos de 6 entre 1 e 2018. [0,25]