MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2019.1 – Gabarito

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Resolva as seguintes recorrências:

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3.$

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,\ a_0 = -1,\ a_1 = 6.$

Solução

(a) A equação característica da recorrência $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0$ é dada por $r^2 - 5r + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = 4$. A solução geral é dada por

$$a_n = c_1 + c_2 \cdot 4^n$$

Considerando que $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$, obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 + 4c_2 &= 3 \end{cases}$$

e resolvendo o sistema, $c_1 = \dfrac{1}{3}$ e $c_2 = \dfrac{2}{3}$. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^n$$

(b) A equação característica da recorrência $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ é dada por $r^2 - 4r + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 2$. A solução geral é dada por $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + t_n$, onde t_n é uma solução particular.

Tentaremos uma solução do tipo $t_n = A \cdot n^2 \cdot 2^n$. Substituindo na recorrência temos que

$$A \cdot (n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4A \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4A \cdot n^2 \cdot 2^n = 2^n$$

Fazendo as contas, obtemos $8A2^n = 2^n$, portanto $A = \dfrac{1}{8}$ e a solução geral é dada por $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + \dfrac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n$. Considerando que $a_0 = -1$ e $a_1 = 6$, obtemos

$$\begin{cases} c_1 &= -1 \\ 2c_1 + 2c_2 + \dfrac{1}{4} &= 6 \end{cases}$$

e daí, $c_1 = -1, c_2 = \dfrac{31}{8}$. Portanto a solução é dada por

$$a_n = -2^n + \frac{31}{8} \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n$$

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever a forma da solução geral . [0,25]
- Obter a solução, usando as condições iniciais. [0,25]

(b)
- Escrever a forma da solução. [0,25]
- Determinar uma solução particular. [0,25]
- Obter a solução, usando as condições iniciais. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

(a) Prove, usando indução, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

(b) Prove, usando congruências, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

Solução

(a) Para $n = 1$, temos $11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 23 \cdot 133$, logo divisível por 133.

Suponha que, para um certo $k \geqslant 1$, tenhamos $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ divisível por 133.

Vamos provar que $11^{k+3} + 12^{2k+3}$ também é divisível por 133.

Temos que

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 12^2 = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot (133 + 11).$$

Logo,

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}.$$

Como, por hipótese de indução, 133 divide $11^{k+2} + 12^{2k+1}$, concluímos que $11^{k+3} + 12^{2k+3}$ é divisível por 133.

Portanto, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer n natural.

(b) Basta provar que $11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 0 \mod 133$.

Temos, usando propriedades das congruências, que

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n \equiv 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n \equiv 133 \cdot 11^n \equiv 0 \mod 133$$

Uma alternativa para as contas:

$$11^{n+2} = 121 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \mod 133$$
$$12^{2n+1} = 12 \cdot 144^n \equiv 12 \cdot 11^n \mod 133$$

Somando as duas congruências obtemos

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 0 \mod 133$$

Portanto, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer n natural.

Pauta de Correção:

(a)
- Verificar que a afirmação é válida para $n = 1$. [0,25]
- Concluir a prova por indução. [0,50]

(b)
- Indicar que basta provar que $11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 0 \mod 133$. [0,25]
- Concluir a prova. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Dado um número real x, o *piso* de x, denotado por $\lfloor x \rfloor$, é o único inteiro k tal que $k \leqslant x < k + 1$.

(a) Considere a e b, respectivamente, o menor e o maior número natural com n algarismos expressados no sistema decimal. Forneça expressões algébricas para a e b em função de n.

(b) Mostre que a quantidade de algarismos, no sistema decimal, do número inteiro positivo N é igual a $\lfloor \log N \rfloor + 1$, onde log é a função logaritmo decimal.

(c) Mostre que se p é um inteiro positivo, então $2^p - 1$ tem $\lfloor p \cdot \log 2 \rfloor + 1$ algarismos no sistema decimal.

Solução

(a) O menor número, no sistema decimal, com n algarismos é $a = 10^{n-1}$ e o maior é $b = 10^n - 1$.

(b) Suponha que N possui n algarismos no sistema decimal. Pelo item (a) segue que $10^{n-1} \leqslant N \leqslant 10^n - 1 < 10^n$. Como a função logaritmo decimal é crescente, segue que $\log 10^{n-1} \leqslant \log N < \log 10^n$, ou seja, $n - 1 \leqslant \log N < n$ e assim $\lfloor \log N \rfloor = n - 1$. Logo $n = \lfloor \log N \rfloor + 1$.

(c) Observamos que os únicos números consecutivos que têm quantidades diferentes de algarismos no sistema decimal são aqueles da forma $10^n - 1$ e 10^n. Como 2^p não é uma potência de 10 segue que os números $2^p - 1$ e 2^p têm a mesma quantidade de algarismos. Logo a quantidade de algarismos de M_p é igual a $\lfloor \log(2^p - 1) \rfloor + 1 = \lfloor \log(2^p) \rfloor + 1 = \lfloor p \cdot \log 2 \rfloor + 1$.

Pauta de Correção:

(a)
- Expressar a. [0,25]
- Expressar b. [0,25]

(b)
- Utilizar o item (a) e argumentar que a função logaritmo decimal é crescente. [0,25]
- Concluir a demonstração. [0,25]

(c)
- Provar o item, utilizando o item (b). [0,25]

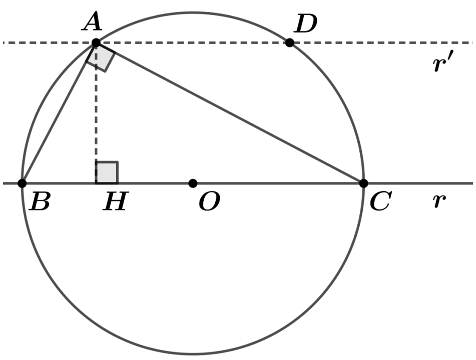
Questão 04 [1,25]

Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com $s > 2q$, indique a construção com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Solução

- Trace uma reta r e marque, sobre a mesma, pontos B e C tais que $BC = s$.
- Construa um círculo de diâmetro BC.
- Trace a reta r' paralela a reta r distando q dela, a qual intersecta o semicírculo superior nos pontos A e D, pois $q < \frac{s}{2}$.
- Temos que o triângulo ABC é retângulo em A.
- Considere H o pé da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, logo $AH = q$.
- Temos que $q^2 = (AH)^2 = (BH) \cdot (HC)$ e $BH + HC = s$.

Portanto, $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ são as raízes da equação $x^2 - sx + q^2 = 0$.



Pauta de Correção:

- Construir um círculo de raio $\frac{s}{2}$. [0,25]
- Observar que o triângulo ABC é retângulo. [0,25]
- Usar a relação métrica $(AH)^2 = (BH) \cdot (HC)$. [0,5]
- Concluir que $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ são as raízes da equação. [0,25]

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios com, respectivamente, a e b elementos.

(a) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função **bijetiva** de A em B? Nesta condição, quantas funções bijetivas existem?

(b) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função **injetiva** de A em B? Nesta condição, quantas funções injetivas existem?

Solução

(a) Uma função de A em B será bijetiva se for injetiva e sobrejetiva. Pela injetividade, cada elemento de A estará associado a um elemento diferente de B, e, pela sobrejetividade, todo elemento de B estará associado a algum elemento de A. Isto resulta em dizer que A e B possuem o mesmo número de elementos, logo $a = n(A) = n(B) = b$.

Sejam $x_1, \ldots, x_a$ os elementos de A e $y_1, \ldots, y_a$ os elementos de B e $f : A \to B$ bijetiva. Temos que

- $f(x_1)$ pode ser qualquer um dos a elementos de B;
- $f(x_2)$ pode ser qualquer elemento de B, exceto o $f(x_1)$, resultando em $a - 1$ possibilidades para $f(x_2)$.

$$\vdots$$

- $f(x_i)$ pode ser qualquer elemento de B, exceto $f(x_1), \ldots, f(x_{i-1})$, resultando em $a - i - 1 = a - i + 1$ possibilidades para $f(x_i)$.

$$\vdots$$

- $f(x_a)$ poderá ser apenas o elemento que restar após a escolha de $f(x_1), \ldots, f(x_{a-1})$.

Pelo Princípio Multiplicativo, teremos então

$$a \times (a-1) \times (a-2) \times \cdots \times 1 = a!$$

funções bijetivas $f : A \to B$ possíveis.

(b) Se uma função de A em B for injetiva, cada elemento de A estará associado a um elemento diferente de B, logo é necessário que B tenha pelo menos o mesmo número de elementos que A, logo $b = n(B) \geqslant n(A) = a$.

Sejam $x_1, \ldots, x_a$ os elementos de A e $y_1, \ldots, y_b$ os elementos de B e $f : A \to B$ injetiva. Temos que

- $f(x_1)$ pode ser qualquer um dos b elementos de B;
- $f(x_2)$ pode ser qualquer elemento de B, exceto o $f(x_1)$, resultando em $b - 1$ possibilidades para $f(x_2)$.

$$\vdots$$

- $f(x_i)$ pode ser qualquer elemento de B, exceto $f(x_1), \ldots, f(x_{i-1})$, resultando em $b - i - 1 = b - i + 1$ possibilidades para $f(x_i)$.

Fazendo $i = a$, o número de escolhas para $f(x_a)$ será $b - a + 1$.

Pelo Princípio Multiplicativo, teremos então

$$b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-a+1) = \frac{b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-a+1) \times (b-a) \times \cdots \times 1}{(b-a) \times \cdots \times 1} = \frac{b!}{(b-a)!}$$

funções injetivas $f : A \to B$ possíveis.

Pauta de Correção:

(a)
- Afirmar, com justificativa, que $a = b$. [0,25]
- Mostrar que existem $a!$ funções bijetivas. [0,25]

(b)
- Afirmar, com justificativa, que $b \geqslant a$. [0,25]
- Mostrar que existem $b \times (b-1) \times \cdots \times (b-a+1)$ ou $\dfrac{b!}{(b-a)!}$ funções injetivas. [0,5]

Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Considere a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = (x^2 + 2019x - 1)^2 + (2x + 2019)^2$$

(a) Determine constantes k e h tais que a função possa ser reescrita da maneira $f(x) = (x^2 + kx + 1)^2 + h$.

(b) Usando a expressão encontrada no item anterior, encontre o menor valor real α, assumido pela função f.

(c) Encontre a média aritmética de todas as raízes reais da equação $f(x) = \alpha$, com α encontrado no item anterior.

Solução

(a) Desenvolvendo a segunda parcela

$$\begin{aligned}(2x + 2019)^2 &= 4x^2 + 4 \cdot 2019x + 2019^2 \\ &= 4(x^2 + 2019x) + 2019^2.\end{aligned}$$

Se denotarmos $\mu = x^2 + 2019x$ a expressão de $f(x)$ fica

$$\begin{aligned}f(x) &= (\mu - 1)^2 + 4\mu + 2019^2 \\ &= \mu^2 - 2\mu + 1 + 4\mu + 2019^2 \\ &= \mu^2 + 2\mu + 1 + 2019^2 \\ &= (\mu + 1)^2 + 2019^2 \\ &= (x^2 + 2019x + 1)^2 + 2019^2.\end{aligned}$$

Logo $k = 2019$ e $h = 2019^2$.

(b) Como o discriminante de $g(x) = x^2 + 2019x + 1$ é $\Delta = 2019^2 - 4 > 0$ e o termo quadrático tem coeficiente positivo, podemos concluir que o menor valor atingido por g é negativo. Logo o valor mínimo de $g(x)^2$ é igual a zero. Assim o menor valor assumido por $f(x) = g(x)^2 + 2019^2$ é $\alpha = 2019^2$.

(c) As seguintes equações têm as mesmas raízes

$$\begin{aligned}(x^2 + 2019x + 1)^2 + 2019^2 &= 2019^2 \\ (x^2 + 2019x + 1)^2 &= 0 \\ x^2 + 2019x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Logo a média das raízes de $f(x) = \alpha$ é igual a $-\dfrac{2019}{2}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar o valor de k. [0,25]
- Encontrar o valor de h. [0,25]

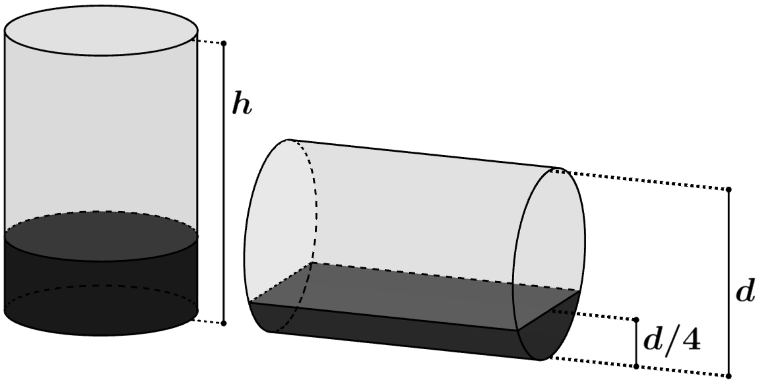
(b)
- Concluir que o valor mínimo de g é negativo e que, portanto, o valor mínimo de seu quadrado é zero. [0,25]
- Encontrar o valor mínimo de f. [0,25]

(c)
- Encontrar a média das raízes. [0,25]

Questão 07 [1,25]

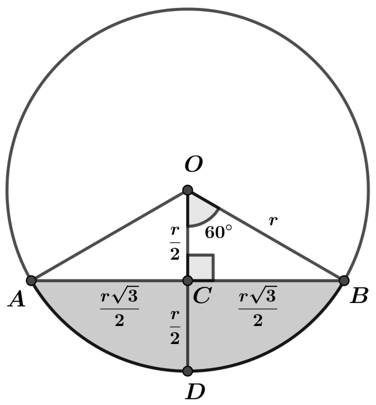
Um recipiente cilíndrico de base circular está parcialmente cheio de água. Quando "deitado", isto é, apoiado sobre uma de suas geratrizes, o nível da água atinge um quarto do diâmetro d da base do cilindro, conforme figura. Quando o cilindro é "levantado", isto é, apoiado sobre uma de suas bases, o nível da água atinge que fração da altura h do cilindro?

Observação: Considere desprezível a espessura das paredes e das bases do recipiente.



Solução

A figura abaixo representa a base do cilindro, quando este está deitado. O líquido corresponde ao segmento circular hachurado, de área S_s.



Chamando de r o raio da base, como o nível do líquido é $d/4$, na figura acima teremos $\overline{CD} = \overline{OC} = \frac{r}{2}$. Com isso, como $\cos(B\hat{O}C) = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$, temos $B\hat{O}C = 60°$.

Com isso, o arco AB mede $120°$, logo a área S_s do segmento circular é obtida subtraindo-se, do setor circular de $120°$, a área do triângulo AOB. Com isso,

$$S_s = \frac{\pi\, r^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OC} = \frac{\pi\, r^2}{3} - \cdot 12 \cdot \frac{r}{2} \cdot r\sqrt{3} = r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Assim, o volume do líquido é dado por

$$V = h \cdot S_s = h\, r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ao levantar o cilindro, o volume do líquido é dado por $\ell \cdot S_b$, onde ℓ é o nível do líquido e S_b a área da base. Assim,

$$V = \ell \cdot \pi\, r^2.$$

Com isso, temos

$$h\, r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \ell \cdot \pi\, r^2,$$

logo

$$\frac{\ell}{h} = \frac{r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\pi\, r^2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Logo, o nível da água, quando o cilindro é levantado, corresponde a $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ da altura h do cilindro.

Pauta de Correção:

- Identificar que $A\hat{O}B = 120°$. [0,25]
- Calcular a área do segmento circular. [0,25]
- Calculou o volume do líquido em função de r e h, quando o cilindro está deitado. [0,25]
- Obter o volume do líquido quando o cilindro está em pé, em função do nível ℓ e de r. [0,25]
- Obter a razão entre o nível ℓ e h (considerar também se, em vez da razão, o aluno apresentar ℓ em função de h). [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=1,00; (b)=0,25]**

(a) Determine o menor número natural c para o qual a equação

$$5X + 7Y = c$$

tenha exatamente 4 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Determine, explicitamente, as 4 soluções obtidas no item (a).

Solução

(a) Considere c, um número natural. Temos que $5 \cdot (3) + 7 \cdot (-2) = 1$, logo $5 \cdot (3c) + 7 \cdot (-2c) = c$.

Usando a solução particular $x_0 = 3c$ e $y_0 = -2c$, escrevemos a solução geral da equação $5X + 7Y = c$:

$$\begin{cases} x &= 3c + 7t \\ y &= -2c - 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como procuramos soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ temos que, $3c + 7t \geqslant 0$ e $-2c - 5t \geqslant 0$. Logo, $\dfrac{-3c}{7} \leqslant t \leqslant \dfrac{-2c}{5}$.

Como queremos 4 soluções, $\dfrac{-2c}{5} - \dfrac{-3c}{7} \geqslant 3$, logo $c \geqslant 105$.

Considerando $c = 105$, obtemos $-45 \leqslant t \leqslant -42$.

Portanto, exatamente 4 soluções correspondentes à $t = -45, -44, -43, -42$.

(b) Temos a equação $5X + 7Y = 105$. Para encontrar as 4 soluções, basta substituir os valores de t na equação geral:

$$\begin{cases} x &= 315 + 7t \\ y &= -210 - 5t \end{cases}$$

obtendo $(0, 15), (7, 10), (14, 5)$ e $(21, 0)$.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever a solução geral da equação em $\mathbb{Z}$. [0,5]
- Determinar o intervalo para a obtenção de soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. [0,25]
- Determinar o valor de c. [0,25]

(b) Determinar as 4 soluções. [0,25].

Solução Alternativa

(a) Seja c um número natural tal que a equação $5X + 7Y = c$ tenha 4 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e seja (x_0, y_0) a solução em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, com x_0 a menor possível (solução minimal). Então a solução geral dessa equação é dada por

$$\begin{cases} x &= x_0 + 7t \\ y &= y_0 - 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Indicando por (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) as outras soluções, com $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, tem-se que $x_3 \geqslant 21$ e daí

$$c = 5x_3 + 7y_3 \geqslant 5 \cdot 21 + 7y_3 \geqslant 105$$

Tomando $c = 105$, vamos mostrar que a equação $5X + 7Y = 105$ tem exatamente 4 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Nesse caso, a solução minimal é $(0, 15)$ e a solução geral é dada por

$$\begin{cases} x &= 7t \\ y &= 15 - 5t, \end{cases}$$

onde $t \geqslant 0$ e $15 - 5t \geqslant 0$, isto é, $0 \leqslant t \leqslant 3$. Portanto, exatamente 4 soluções.

(b) Temos a equação $5X + 7Y = 105$. Para encontrar as 4 soluções não negativas, basta substituir os valores de $t = 0, 1, 2, 3$ na equação geral obtendo as soluções $(0, 15), (7, 10), (14, 5)$ e $(21, 0)$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

(a)
- Escrever a solução geral da equação em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.$[0, 5]$
- Concluir que $c \geqslant 105$. $[0, 25]$
- Mostrar que, para $c = 105$ a equação tem exatamente 4 soluções. $[0, 25]$

(b) Determinar as 4 soluções. [0,25].