MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2019.2 – Gabarito

[01] QstId=227 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Prove que, se p é primo e $p \neq 3$, então p^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

(b) Sejam p, q, r e n primos positivos tais que $n = p^2 + q^2 + r^2$. Mostre que um dos primos p, q, r é igual a 3.

Solução

(a) Considere p primo, $p \neq 3$. Pela divisão euclidiana, tem-se que

$$p = 3s + t, \quad \text{com} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Como p é primo e $p \neq 3$, segue que $t = 1$ ou $t = 2$ e assim $p = 3s + 1$ ou $p = 3s + 2$. Analisando os dois casos,

$p^2 = (3s+1)^2 = 9s^2 + 6s + 1 = 3(3s^2 + 2s) + 1$

$p^2 = (3s+2)^2 = 9s^2 + 12s + 4 = 3(3s^2 + 4s + 1) + 1$

Portanto, p^2 deixa resto igual a 1 na divisão por 3.

(b) Sejam p, q, r e n primos tais que $n = p^2 + q^2 + r^2$. Suponha, por absurdo, que $p, q, r \neq 3$. Daí, usando o item (a),

$$n = (3s_1 + 1) + (3s_2 + 1) + (3s_3 + 1) = 3(s_1 + s_2 + s_3 + 1)$$

Temos uma contradição, pois $n > 3$ e n é primo.

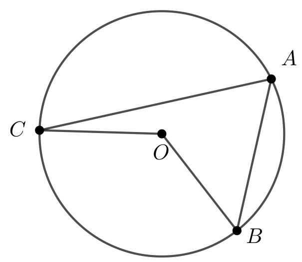
Pauta de Correção:

(a)
- Escrever que $p = 3s + 1$ ou $p = 3s + 2$. [0,25]
- Concluir que, nos dois casos, p^2 deixa resto 1 na divisão por 3. [0,25]

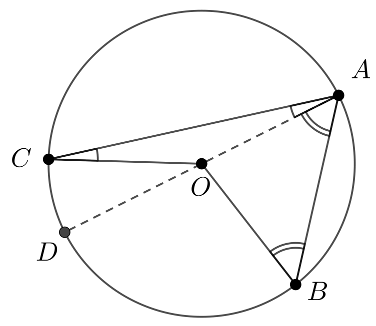
(b)
- Supor, por absurdo, que $p, q, r \neq 3$. [0,25]
- Usar o item (a) para escrever n. [0,25]
- Concluir a contradição. [0,25]

[02] QstId=1437 [1,25]

O **Teorema do Ângulo Inscrito** afirma que se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade do ângulo central $\angle BOC$ correspondente. Prove esse teorema no caso em que o ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior.



Solução



Prolongando o raio AO obtemos o diâmetro AD. Os triângulos AOC e AOB são isósceles de bases AC e AB, respectivamente, logo

$$O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = \alpha \text{ e } O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = \beta.$$

Como o centro O está no interior do ângulo $B\widehat{A}C$, o diâmetro AD divide em dois cada um dos ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{O}C$, ou seja,

$$B\widehat{O}C = C\widehat{O}D + B\widehat{O}D \text{ e } B\widehat{A}C = B\widehat{A}O + C\widehat{A}O.$$

Usando o teorema do ângulo externo aplicado aos triângulos AOC e OBA obtemos $C\widehat{O}D = 2\alpha$ e $B\widehat{O}D = 2\beta$. Concluímos que,

$$B\widehat{O}C = C\widehat{O}D + B\widehat{O}D = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2B\widehat{A}C.$$

Portanto, $B\widehat{A}C = \dfrac{B\widehat{O}C}{2}$.

Pauta de Correção:

- Concluir que os triângulos AOC e AOB são isósceles. [0,25]
- Concluir que os ângulos das bases dos triângulos isósceles são congruentes. [0,25]
- Observar que o diâmetro AD divide em dois cada um dos ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{O}C$. [0,25]
- Aplicar o teorema do ângulo externo duas vezes. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

[03] QstId=1348 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Sabendo que u e v são as raízes reais da equação $x^2 + bx + c = 0$, onde $b, c \in \mathbb{R}$, encontre:

(a) Uma equação do segundo grau, com coeficientes dados em função de b e c, que tenha como raízes u^2 e v^2.

(b) Uma equação do segundo grau, com coeficientes dados em função de b e c, que tenha como raízes u^3 e v^3.

Solução

Note que se u e v são raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, então $u + v = -b$ e $uv = c$.

(a) Pelas relações acima segue que

$$u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = b^2 - 2c \text{ e } u^2v^2 = (uv)^2 = c^2.$$

Logo u^2 e v^2 são raízes da equação do segundo grau $x^2 + (2c - b^2)x + c^2 = 0$.

(b) Agora temos que $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = -b^3 - 3c(-b) = -b^3 + 3bc$ e $u^3v^3 = (uv)^3 = c^3$.

Logo u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $x^2 + (b^3 - 3bc)x + c^3 = 0$.

Pauta de Correção:

(a)
- Observar que $u+v=-b$ e $u \cdot v = c$. [0,25]
- Expressar u^2+v^2 em função de b e de c. [0,25]
- Achar a equação pedida. [0,25]

(b)
- Expressar u^3+v^3 em função de b e de c. [0,25]
- Achar a equação pedida. [0,25]

Solução Alternativa

Seja u uma raiz da equação $x^2+bx+c=0$.

(a) Como $u^2+bu+c=0$ então $-bu=u^2+c$, logo $(-bu)^2=u^4+2cu^2+c^2$. Portanto $u^4+(2c-b^2)u^2+c^2=0$. Segue-se que u^2 é raiz da equação $x^2+(2c-b)x+c^2=0$.

(b) Tem-se que $(-bu)^3=(u^2+c)^3=u^6+3u^2c(u^2+c)+c^3=u^6-3bcu^3+c^3$ Portanto $u^6+(b^3-3bc)u^3+c^3=0$. Segue-se que u^3 é raiz da equação $x^2+(b^3-3bc)x+c^3=0$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

(a)
- Escrever $-bu=u^2+c$. [0,25]
- Desenvolver e obter $b^2u^2=u^4+2cu^2+c^2$. [0,25]
- Achar a equação pedida. [0,25]

(b)
- Desenvolver $(-bu)^3=u^6+3cu^2(u^2+c)+c^3=u^6-3bcu^3+c^3$. [0,25]
- Achar a equação pedida. [0,25]

[04] QstId=1420 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

(a) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z+t=98$.

(b) Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação $x+y+z \leqslant 98$.

Solução

(a) Cada solução da equação $x+y+z+t=98$ pode ser representada por uma fila de 98 sinais + e 3 sinais | que separam as incógnitas. Além disso, cada fila desta forma corresponde a uma solução da equação. Por exemplo, $\underbrace{++\ldots+}_{29}|\underbrace{++\ldots+}_{37}||\underbrace{++\ldots+}_{32}$ corresponde à solução $(29,37,0,32)$.

Para contar a quantidade de tais filas, basta escolher 98 dentre os 98+3=101 lugares para colocar os sinais de +. Isso pode ser feito de C_{101}^{98} maneiras, ou seja, $\dfrac{101!}{98!3!}=166.650$ são as soluções da equação $x+y+z+t=98$.

(b) Em cada solução inteira não negativa de $x+y+z \leqslant 98$ definimos a *folga* da solução por $t=98-(x+y+z)$. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leqslant 98$ e as soluções inteiras não negativas de $x+y+z+t=98$.

Portanto o número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leqslant 98$ é igual a 166.650.

Pauta de Correção:

(a)
- Representar as soluções através de dois símbolos colocados em fila. [0,25]
- Identificar uma técnica de contagem adequada (combinação simples ou permutação com repetição) para encontrar o número de soluções. [0,25]
- Obter a resposta correta. [0,25]

(b)
- Observar que o número de soluções da inequação coincide com o número de soluções da equação. [0,25]
- Obter a resposta correta. [0,25]

Pauta Alternativa de Correção para o item (a):

- Identificar a combinação com repetição como técnica de contagem. [0,5]
- Realizar as contas corretamente. [0,25]

[05] QstId=1453 [1,25]

Você tem dinheiro aplicado à taxa de 10% ao mês. Suponha que, com esse dinheiro, deseja comprar um bem e você tem duas opções de pagamento:

(I) À vista no valor de R$ 3.500,00.

(II) Em 2 prestações mensais fixas de R$ 2.000,00, vencendo a primeira um mês após a compra.

Qual das opções é a mais vantajosa financeiramente?

Solução
Considere a data da compra à vista como sendo a data *zero*. Tomando o valor de cada prestação para a data *zero* com a taxa de 10%, teremos um total de

$$\frac{2000}{1,1} + \frac{2000}{(1,1)^2} = \frac{2000 \cdot (1,1) + 2000}{(1,1)^2} = \frac{4200}{1,21} \approx \quad 3471,07 \quad \text{que é menor que 3500.}$$

Logo a opção (II) é a mais vantajosa .

Pauta de Correção:

- Determinar o valor da prestação ou o valor à vista em alguma data. [0,25]
- Calcular o somatório das prestações em alguma data. [0,25]
- Comparar o somatório com o valor à vista na mesma data. [0,25]
- Concluir corretamente a melhor opção. [0,5]

Solução Alternativa

Digamos que você tem os R$ 3500,00, mas opta pela opção (II).

Assim, após um mês você terá $3500 + 10\% \cdot 3500 = 3850$ reais. Você paga a primeira parcela de R$ 2000 e ainda sobram 1850 reais.

Após mais um mês, haverá $1850 + 10\% \cdot 1850 = 2035$ reais na conta. Logo você paga a segunda parcela e sobrarão 35 reais.

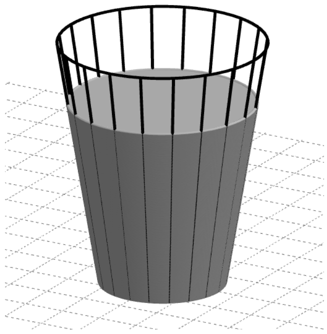
Portanto a opção (II) é a mais vantajosa.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Concluir que o valor à vista, após um mês, valerá 3850 reais.[0,25]
- Deduzir a primeira prestação e obter 1850 reais. [0,25]
- Calcular o valor da aplicação de 1850 reais, após um mês. [0,25]
- Concluir que, após pagar a segunda prestação ainda sobrarão 35 reais reais e escolher a segunda opção. [0,5]

[06] QstId=1457 [1,25]

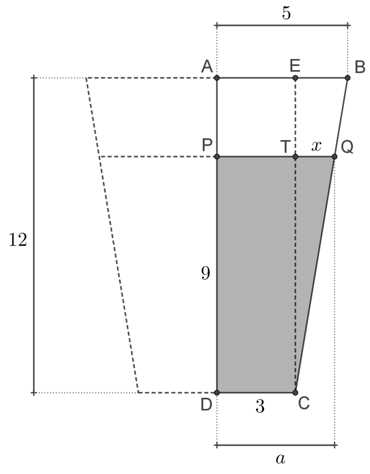
O copo em forma de tronco de cone circular reto representado na figura está apoiado em uma superfície perfeitamente horizontal e tem as seguintes medidas: raio da base superior igual a 5 cm, raio da base inferior igual a 3 cm e altura igual a 12 cm. Se esse copo está preenchido com água até a altura de 9 cm, pergunta-se: é possível transferir toda a água contida em um outro copo de 200 mL, completamente cheio, para o copo que aparece na figura sem que este transborde?



Informação: O volume V de um tronco de cone cujos raios das bases são R e r e cuja altura é h é dado por $V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Solução

Efetuando um corte transversal passando pelos centros A e D das circunferências da borda e da base do copo obtemos uma figura como a representada abaixo, na qual estão representados o trapézio ABCD, cujas bases AB e CD medem, respectivamente, 5 cm e 3 cm e cuja altura mede 12 cm e o trapézio PQCD, cuja base PQ mede a e a altura mede 9 cm.



Traçando uma paralela a AD passando por C obtemos os pontos E e T de interseção desta paralela com os segmentos AB e PQ. Chamaremos de x a medida do segmento TQ. Note que $a = 3 + x$.

Para saber se o copo irá ou não transbordar ao acrescentarmos 200 mL de água precisamos calcular a capacidade da parte vazia do copo, isto é, o volume do tronco de cone de altura AP = 3 cm e raios das bases a cm e 5 cm. Resta-nos então a tarefa de encontrar o valor de a. Para tanto, basta descobrirmos o valor de x, considerando a semelhança entre os triângulos BCE e QCT. Assim temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{12}$$
$$x = 1,5.$$

Assim, concluímos que $a = 4,5\ cm$ e, utilizando a fórmula fornecida para o cálculo do volume V do tronco de cone concluímos que:

$$V = \frac{3\pi}{3}(5^2 + 5 \times 4,5 + (4,5)^2)$$
$$V = \pi(25 + 22,5 + 20,25)$$
$$V \approx 3,14 \times 67,75$$
$$V \approx 212,735\ cm^3.$$

Desta forma, como o volume da parte vazia do copo é de aproximadamente $212,735\ cm^3 = 212,735\ mL > 200\ mL$, chegamos a conclusão de que é possível acrescentar mais 200 mL de água no copo sem que este transborde.

Pauta de Correção:

- Representar o corte transversal do copo por meio de uma figura. [0,25]
- Encontrar o raio da circunferência que representa a superfície da água contida no copo inicialmente. [0,5]
- Calcular o volume da parte vazia do copo. [0,25]
- Concluir que é possível acrescentar mais 200 mL de água no copo sem que este transborde. [0,25]

[07] QstId=1465 [1,25]

Considere duas progressões aritméticas, de razões não nulas:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

Mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que
$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n, \ldots$.

Solução

Sejam r e s, respectivamente, as razões das progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots).$$

Unicidade: Considere uma função afim $f(x) = mx + n$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Então,

$$\begin{cases} m \cdot a_1 + n = b_1 \\ m(a_1 + r) + n = b_1 + s. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $m = \dfrac{s}{r}$ e $n = b_1 - \dfrac{s}{r}a_1$. Portanto, existe uma única função afim $f(x) = mx + n$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$.

Existência: Agora basta verificar que a função afim $f(x) = \dfrac{s}{r}x + \left(b_1 - \dfrac{s}{r}a_1\right)$ é tal que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$.

Temos que $a_n = a_1 + (n-1)r$ e $b_n = b_1 + (n-1)s$ e assim

$$f(a_n) = \frac{s}{r}(a_1 + (n-1)r) + \left(b_1 - \frac{s}{r}a_1\right) = \frac{s}{r}a_1 + (n-1)s + b_1 - \frac{s}{r}a_1 = b_n$$

Pauta de Correção:

- Considerar uma função $f(x) = mx + n$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. [0,25]
- Calcular m e n. [0,25]
- Escrever os termos gerais das duas sequências. [0,25]
- Mostrar que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$. [0,5]

Solução Alternativa

Sejam r e s, respectivamente, as razões das progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

Existência: O gráfico de uma função afim é uma reta. A equação da reta que passa pelos pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) é dada por

$$f(x) = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1) = b_1 + \frac{b_1 + s - b_1}{a_1 + r - a_1}(x - a_1) = b_1 + \frac{s}{r}(x - a_1)$$

Vamos mostrar que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$.
Temos que $a_n = a_1 + (n-1)r$ e $b_n = b_1 + (n-1)s$ e assim

$$f(a_n) = b_1 + \frac{s}{r}(a_1 + (n-1)r - a_1) = b_1 + (n-1)s = b_n$$

Unicidade: Considere $g(x) = mx + x$ uma função afim tal que $g(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$. Como $g(a_1) = b_1$ e $g(a_2) = b_2$ temos que

$$\begin{cases} m \cdot a_1 + n = b_1 \\ m \cdot a_2 + n = b_2 \end{cases}$$

Obtemos assim, $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = \dfrac{s}{r}$ e $n = b_1 - \dfrac{s}{r}a_1$.

Logo temos que $g(x) = \dfrac{s}{r}x + b_1 - \dfrac{s}{r}a_1 = b_1 + \dfrac{s}{r}(x - a_1) = f(x)$, para todo x real. Portanto $g = f$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Encontrar a função $f(x) = b_1 + \dfrac{s}{r}(x - a_1)$. [0,25]
- Escrever os termos gerais das duas sequências. [0,25]
- Mostrar que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$. [0,25]
- Considerar uma função afim g tal que $g(a_n) = b_n$, para todo $n \geqslant 1$. [0,25]
- Mostrar que $g = f$. [0,25]

[08] QstId=1468 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Mostre que se a, b e c são inteiros tais que $a \mid (b + c)$ e $a \mid b$, então $a \mid c$.

(b) Determine os números primos tais que p divide $3^p + 382$.

Solução

(a) Temos que existem k e $\ell \in \mathbb{Z}$ tais que $b + c = ak$ e $b = a\ell$. Logo

$$a\ell + c = ak \iff c = ak - a\ell \iff c = a(k - \ell).$$

Portanto, $a \mid c$.

(b) Como p é primo, pelo Teorema de Fermat, temos que $p|(3^p - 3)$.
Escrevendo $3^p + 382 = 3^p - 3 + 385$, concluímos que $p|(3^p + 382)$ se, e somente se, $p|385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. Portanto $p = 5$, 7 ou 11.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever as hipóteses sob a forma de igualdades. [0,25]
- Provar o resultado. [0,25]

(b)
- Observar, usando Fermat, que p divide $3^p - 3$. [0,25]
- Calcular os valores de p. [0,5]