MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2020.1 – Gabarito

Questão 01 [1,25]

Determine um número inteiro entre 1200 e 1400 que deixa restos 2 e 6 quando dividido, respectivamente, por 11 e 13.

Solução

Queremos determinar uma solução inteira x, $1200 < x < 1400$, do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \mod 11 \\ X \equiv 6 \mod 13 \end{cases}$$

Como $(11, 13) = 1$, podemos aplicar o Teorema Chinês dos Restos para obter a solução geral.

Considere $M = 11 \cdot 13 = 143, M_1 = 13$ e $M_2 = 11$.

A solução geral é dada por $X = M_1y_1c_1 + M_2y_2c_2 + 143t,$ com $t \in \mathbb{Z}$, onde $c_1 = 2, c_2 = 6$ e y_1, y_2 são soluções das congruências $M_1y_1 \equiv 1 \mod 11, M_2y_2 \equiv 1 \mod 13$.

Temos que

$$13y_1 \equiv 1 \mod 11 \Leftrightarrow 2y_1 \equiv 1 \mod 11$$
$$11y_2 \equiv 1 \mod 13 \Leftrightarrow -2y_2 \equiv 1 \mod 13$$

com soluções $y_1 = 6$ e $y_2 = 6$.

Assim, $X = 13 \cdot 6 \cdot 2 + 11 \cdot 6 \cdot 6 + 143t = 552 + 143t$.

Como procuramos uma solução x, $1200 < x < 1400$, obtemos $t = 5$ e $x = 1267$.

Pauta de Correção:

- Escrever o sistema de congruências. [0,25]
- Escrever a forma da solução geral. [0,25]
- Achar a solução geral. [0,5]
- Achar a solução particular. [0,25]

Solução Alternativa

Queremos determinar uma solução inteira x, $1200 < x < 1400$, do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \mod 11 \\ X \equiv 6 \mod 13 \end{cases}$$

Temos que a solução da primeira congruência é dada por $X = 2 + 11t$. Substituindo na segunda congruência obtemos $2 + 11t \equiv 6 \mod 13$.
Como,

$$2 + 11t \equiv 6 \mod 13 \Leftrightarrow 11t \equiv 4 \mod 13 \Leftrightarrow -2t \equiv 4 \mod 13$$
$$-2t \equiv 4 \mod 13 \Leftrightarrow -12t \equiv 24 \equiv 11 \mod 13 \Leftrightarrow t \equiv 11 \mod 13$$

Assim segue que, $t = 11 + 13k$ e $X = 2 + 11(11 + 13k) = 123 + 143k$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Como procuramos uma solução x, $1200 < x < 1400$, obtemos $k = 8$ e $x = 1267$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Escrever o sistema de congruências. [0,25]
- Resolver uma das congruências e substituir a solução na outra. [0,25]
- Achar a solução geral. [0,5]
- Achar a solução particular. [0,25]

Outra Solução Alternativa

Queremos determinar uma solução inteira X, com $1200 < X < 1400$ tal que $X = 11x + 2$ e $X = 13y + 6$.

Então temos a equação diofantina linear $11x - 13y = 4$ que tem como solução particular $x = -2$ e $y = -2$.

Como $(11, 13) = 1$, a solução geral é $x = 13t - 2, y = 11t - 2$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Assim segue que $X = 11(13t - 2) + 2 = 143t - 20$.

Logo temos que $1200 < 143t - 20 < 1400 \leftrightarrow 1220 < 143t < 1420$ e então $t = 9$.

Portanto $X = 143 \cdot 9 - 20 = 1267$.

Pauta de Correção da Outra Solução Alternativa:

- Escrever a equação diofantina linear. [0,25]
- Encontrar a solução geral da equação diofantina linear. [0,5]
- Achar a solução geral para X. [0,25]
- Achar o valor de X. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe um número real x tal que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$.

(b) Se x é um número real tal que $x > 3$, então $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

(c) Para todo número real x, tem-se que $x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1$.

Solução

(a) Temos que

$$\begin{aligned} 5x + 7 < 2 - x < 7x + 8 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5x + 7 < 2 - x \quad \text{e} \quad 2 - x < 7x + 8 \\ &\Longleftrightarrow \quad x < -\frac{5}{6} \quad \text{e} \quad x > -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a sentença é falsa, pois $-\dfrac{5}{6} < -\dfrac{3}{4}$.

(b) Como $x > 3$, temos que $x^2 + 4x + 3 > 0$ e assim

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0 \iff x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Considerando que $x^2 - 4x + 3 > 0 \iff (x - 1)(x - 3) > 0$, concluímos que, se $x > 3$ então $(x - 1)(x - 3) > 0$. Portanto, a sentença é verdadeira.

(c) A sentença é falsa pois para $x = -2$ temos que

$$-2 < 1 \;\text{ e }\; (-2)^2 > 1.$$

Pauta de Correção:

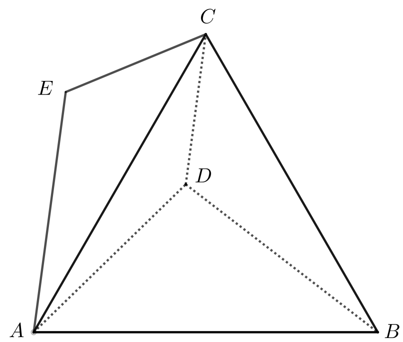
(a)
- Escrever que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$ é equivalente a $5x + 7 < 2 - x$ e $2 - x < 7x + 8$. [0,25]
- Resolver as duas inequações e concluir que a sentença é falsa. [0,25]

(b)
- Observar que, como $x > 3$, a inequação é equivalente a $x^2 - 4x + 3 > 0$. [0,25]
- Concluir que, como $x > 3$, a sentença é verdadeira. [0,25]

(c) Justificar que a sentença é falsa exibindo um valor de x que não verifica a implicação. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,25; (d)=0,25]

Seja D um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC de lado ℓ tal que $\overline{AD} = 7$, $\overline{BD} = 8$ e $\overline{CD} = 5$. Considere um ponto E no exterior do triângulo ABC, conforme a figura, tal que o ângulo $D\widehat{C}E = 60°$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$.



(a) Mostre que os triângulos ACE e BCD são congruentes.

(b) Determine os comprimentos dos segmentos AE e DE.

(c) Encontre a medida do ângulo $A\widehat{E}D$.

(d) Encontre o valor de ℓ.

Solução

(a) Como $D\widehat{C}E = B\widehat{C}A = 60°$, então $B\widehat{C}D = B\widehat{C}A - D\widehat{C}A = 60° - D\widehat{C}A = D\widehat{C}E - D\widehat{C}A = A\widehat{C}E$ e, já que $\overline{AC} = \overline{BC}$, pois ABC é equilátero, e $\overline{CE} = \overline{CD}$, por hipótese, concluímos pelo caso **LAL**, que os triângulos ACE e BCD são congruentes.

(b) Pela congruência provada no item (a) temos que $\overline{AE} = \overline{BD} = 8$. Além disso, como $\overline{CD} = \overline{CE} = 5$ e $D\widehat{C}E = 60°$, segue que o triângulo DCE é equilátero e, portanto, $\overline{DE} = 5$.

(c) Seja $A\widehat{E}D = \alpha$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AED temos que $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DE} \cdot \cos\alpha$. Segue daí que $49 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$ e então $\cos\alpha = 0,5$. Portanto $A\widehat{E}D = \alpha = 60°$.

(d) Usando o fato, já concluído no item (b), de que CDE é equilátero e o resultado provado no item (c), temos que $A\widehat{E}C = 120°$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AEC segue que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE} \cdot \cos 120°.$$

Logo temos que $\ell^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot (-0,5) = 129$.
Portanto $\ell = \sqrt{129}$.

Pauta de Correção:

(a) Provar a congruência dos triângulos ACE e BCD. [0,25]

(b)
- Determinar o comprimento do segmento AE. [0,25]
- Determinar o comprimento do segmento DE. [0,25]

(c) Encontrar o valor de $A\widehat{E}D$ usando a lei dos cossenos. [0,25]

(d) Encontrar o valor de ℓ usando a lei dos cossenos. [0,25]

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Dizemos que dois polinômios $p(X)$ e $q(X)$ são *tangentes para* $X = r$ quando a diferença $p(X) - q(X)$ é divisível por $(X - r)^2$.

(a) Mostre que $p(X) = aX^2 + bX + c$ e $q(X) = (2ar + b)X + (c - ar^2)$ são tangentes para $X = r$.

(b) Seja $p(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, em que $n \geqslant 2$ e $a_1 \neq 0$. Encontre o polinômio de grau 1 que é tangente a $p(X)$ para $X = 0$.

Solução

(a)

$$\begin{aligned} p(X) - q(X) &= aX^2 + bX + c - ((2ar + b)X + (c - ar^2)) \\ &= aX^2 + bX + c - (2ar + b)X - (c - ar^2) \\ &= aX^2 + (b - (2ar + b))X + c - (c - ar^2) \\ &= aX^2 - 2arX + ar^2 \\ &= a(X - r)^2. \end{aligned}$$

Logo $(X - r)^2$ divide $p(X) - q(X)$.

(b) Seja $q(X) = mX + n$. Queremos encontrar $m, n \in \mathbb{R}$ de forma que X^2 divida $p(X) - q(X)$.

$$\begin{aligned} p(X) - q(X) &= a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 - (mX + n) \\ &= a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + (a_1 - m)X + a_0 - n \\ &= X^2(a_nX^{n-2} + \cdots + a_3X + a_2) + (a_1 - m)X + a_0 - n. \end{aligned}$$

Como o resto $r(X) = (a_1 - m)X + a_0 - n$ nesta expressão deve ser identicamente nulo, concluímos que $a_1 = m$ e que $a_0 = n$, ou seja, $q(X) = a_1X + a_0$.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever o polinômio $p(X) - q(X)$. [0,25]
- Fatorar o polinômio $p(X) - q(X)$. [0,25]

(b)
- Escrever o polinômio $p(X) - q(X)$. [0,25]
- Mostrar que o resto é $r(X) = (a_1 - m)X + a_0 - n$. [0,25]
- Concluir que o resto é identicamente nulo e mostrar $q(X)$. [0,25]

Questão 05 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Quais são os possíveis restos da divisão do quadrado de um número inteiro por 5?

(b) Uma *tripla pitagórica* é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Use o item (a) para mostrar que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 5.

Solução

(a) Todo número inteiro deixa resto 0, 1, 2, 3 ou 4 quando dividido por 5. Desta forma, se n é um inteiro qualquer, temos uma, e apenas uma, das seguintes situações:

$$n \equiv 0 \text{ mod } 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 0 \text{ mod } 5$$
$$n \equiv 1 \text{ mod } 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \text{ mod } 5$$
$$n \equiv 2 \text{ mod } 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$$
$$n \equiv 3 \text{ mod } 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$$
$$n \equiv 4 \text{ mod } 5 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \text{ mod } 5$$

Isto é, um quadrado perfeito deixa resto 0, 1 ou 4 quando dividido por 5.

(b) No caso em que um dos inteiros a ou b é múltiplo de cinco, não há o que provar. Suponhamos então que nem a nem b sejam múltiplos de 5. Então, deve ocorrer uma das possibilidades abaixo:

(1) $a^2 \equiv 1 \text{ mod } 5$ e $b^2 \equiv 1 \text{ mod } 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 \equiv 2 \text{ mod } 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 2 \text{ mod } 5$

(2) $a^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$ e $b^2 \equiv 4 \text{ mod } 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 \equiv 8 \text{ mod } 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 3 \text{ mod } 5$

(3) $a^2 \equiv 1 \text{ mod } 5$ e $b^2 \equiv 4 \text{ mod } 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 \equiv 5 \text{ mod } 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 0 \text{ mod } 5$

(4) $a^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$ e $b^2 \equiv 1 \text{ mod } 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 \equiv 5 \text{ mod } 5 \Longrightarrow c^2 \equiv 0 \text{ mod } 5$

Pelo item (a) sabemos que os dois primeiros casos são impossíveis, já que os restos da divisão por 5 não podem ser 2 nem 3 e os dois últimos casos significam que c^2, e portanto c, é múltiplo de 5. Isso mostra que deve haver sempre um múltiplo de 5 entre os inteiros a, b e c.

Pauta de Correção:

(a)
- Observar que os inteiros podem ser divididos em classes conforme o resto da divisão por 5. [0,25]
- Encontrar os possíveis restos da divisão por 5 elevando ao quadrado os representantes de cada classe. [0,25]

(b)
- Listar todos os casos possíveis. [0,25]
- Argumentar, com base no item (a), que os casos (1) e (2) são impossíveis. [0,25]
- Argumentar que os casos (3) e (4) implicam que c é múltiplo de 5. [0,25]

Questão 06 [1,25]

Um poliedro é dito *inscritível* se existir uma esfera que passa por todos os seus vértices. Mostre que um prisma reto cuja base é um polígono regular é um poliedro inscritível.

Solução

Seja $A_1A_2...A_n$ o polígono regular de uma das bases do prisma. Como este prisma é reto, a outra base será o polígono $A'_1A'_2...A'_n$ congruente a $A_1A_2...A_n$ e tal que os lados correspondentes A_iA_{i+1} e $A'_iA'_{i+1}$ são paralelos.

A base $A_1A_2...A_n$ é regular, logo, podemos considerar o centro O do círculo $\mathcal{C}$, de raio r, que circunscreve este polígono. Como a outra base, $A'_1A'_2...A'_n$, é congruente a $A_1A_2...A_n$, ela será inscritível em um círculo $\mathcal{C}'$, de mesmo raio r e centro O'. Como o sólido em questão é um prisma, os planos que contém as bases são paralelos, e, como este prisma é reto, o segmento OO' será perpendicular a estes planos, e paralelo às arestas $A_iA'_i$.

Seja M o ponto médio de OO'. Cada triângulo MOA_i é retângulo com catetos de medidas $\overline{MO}$ e r. Como isso, todos estes triângulos são congruentes, e, consequentemente, $MA_1 \equiv MA_2 \equiv ... \equiv MA_n$. Da mesma forma, cada triângulo MOA'_i é retângulo com catetos de medidas $\overline{MO'} = \overline{MO}$ e r, logo, $MA'_1 \equiv MA'_2 \equiv ... \equiv MA'_n \equiv MA_1 \equiv ... \equiv MA_n$.

Assim, M é o centro de uma esfera que passa por todos os vértices $A_1, ..., A_n, A'_1, ..., A'_n$, tendo os segmentos MA_i e MA'_i como raios.

Pauta de Correção:

- Apresentar, mesmo que só em um desenho, o segmento que une os centros dos círculos que circunscrevem as bases. [0,25]
- Afirmar que a esfera que circunscreve o prisma tem centro em M, ponto médio do segmento do item de pauta anterior. [0,5]
- Mostrar que todos os segmentos que unem M aos vértices do prisma são congruentes. [0,5]

Questão 07 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^4 + \dfrac{2b}{x^2}$, onde a e b são números reais positivos.

(a) Calcule $f\left(\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}\right)$.

(b) Use a desigualdade das médias para provar que o valor encontrado no item anterior é o valor mínimo de f.

Solução

(a)

$$f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right) = a\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^4 + \frac{2b}{\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)^2} = a\frac{b^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{2b}{\frac{b^{1/3}}{a^{1/3}}} = a^{1/3}b^{2/3} + 2a^{1/3}b^{2/3} = 3\sqrt[3]{ab^2}.$$

(b) Como a, b e x são positivos segue, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (MA $\geqslant$ MG), que

$$f(x) = ax^4 + \frac{2b}{x^2} = ax^4 + \frac{b}{x^2} + \frac{b}{x^2} \geqslant 3\sqrt[3]{ax^4 \cdot \frac{b}{x^2} \cdot \frac{b}{x^2}} = 3\sqrt[3]{ab^2} = f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right).$$

Pauta de Correção:

(a) • Encontrar o valor $3\sqrt[3]{ab^2}$. [0,5]

(b) • Usar a desigualdade das médias com três termos de modo a obter o resultado. [0,5]

• Concluir que $3\sqrt[3]{ab^2}$ é o valor mínimo. [0,25]

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se:

(a) Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?

(b) Se outras 29 pessoas já entraram no ônibus, ocupando as poltronas de forma completamente aleatória, deixando apenas 3 poltronas livres, qual a probabilidade de que seja possível os três se sentarem da forma estabelecida no item anterior?

Solução

(a) Ao entrar no ônibus vazio a criança tem 32 duas possibilidades de escolha. Depois que a criança estiver sentada deve-se decidir qual dos responsáveis sentará ao seu lado, para o que há 2 possibilidades. Estando um dos responsáveis sentado ao lado da criança, o outro deverá então escolher uma dentre as 2 poltronas restantes na mesma fileira. Considerando estas três etapas (escolha da criança, escolha do responsável ao seu lado e escolha da poltrona do outro responsável) e aplicando a elas o princípio fundamental da contagem (PFC) podemos concluir que há $32 \times 2 \times 2 = 128$ configurações de ocupação das três poltronas pela criança e seus responsáveis que atendem as condições do enunciado.

(b) Para encontrar a probabilidade de haver uma configuração que atenda ao item (a) devemos calcular o número de configurações do espaço amostral que atendem a essas condições e dividir esse número pelo total de configurações do espaço amostral. Para encontrar o total de configurações basta notar que precisamos escolher quais serão as três poltronas vazias dentre as 32, o que corresponde a $C_{32}^{3} = \dfrac{32!}{3!\,29!} = 32 \times 31 \times 5 = 4960$ configurações. Já as configurações desejadas são aquelas nas quais as três poltronas livres estão todas na mesma fileira. Assim, para encontrar o total de configurações desejadas, basta escolhermos uma dentre as 8 fileiras existentes e, a seguir, qual dentre as 4 poltronas da fileira escolhida estará ocupada, totalizando, pelo PFC novamente, $8 \times 4 = 32$ possibilidades. Portanto, a probabilidade procurada é $\dfrac{32}{4960} = \dfrac{8 \times 4}{32 \times 31 \times 5} = \dfrac{1}{155}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Concluir que há 32 possibilidades de escolha para a criança ou concluir que após a criança se sentar há $2 \times 2 = 4$ possibilidades de escolha para os responsáveis ou concluir alguma contagem parcial correta. [0,25]
- Concluir que há, no total, 128 possibilidades. [0,25]

(b)
- Concluir que há $C_{32}^{29} = C_{32}^{3} = 32 \times 31 \times 5 = 4960$ casos possíveis, que correspondem a todas as maneiras possíveis dos 29 passageiros se sentarem aleatoriamente no ônibus. [0,25]
- Concluir que há $8 \times 4 = 32$ casos favoráveis, que correspondem aos casos possíveis em que uma fileira terá três lugares vagos. [0,25]
- Calcular a probabilidade como a razão entre casos favoráveis e casos possíveis. $[0, 25]$