ENQ – 2020.2 – Gabarito

[01] **[1,25]**

Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2 + x + 1$ no ponto $P = (1, 3)$ usando o seguinte procedimento:

- Escreva a equação de uma reta r passando pelo ponto $P = (1, 3)$ com inclinação m.
- Determine m de modo que a interseção entre a parábola $y = x^2 + x + 1$ e a reta r tenha um único ponto, no caso o ponto P.

Solução

A equação de uma reta r passando pelo ponto $P = (1, 3)$ é dada por $y = 3 + m(x - 1)$, onde m é a inclinação de r.

Para calcularmos a interseção da parábola com a reta, resolveremos o sistema

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = 3 + m(x - 1) \end{cases}$$

Assim, $x^2 + x + 1 = 3 + m(x - 1)$, donde $x^2 + (1 - m)x + m - 2 = 0$. O sistema terá uma única solução se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Calculando $\Delta = (1 - m)^2 - 4(m - 2) = m^2 - 6m + 9 = (m - 3)^2$, obtemos $\Delta = 0$ se, e somente se $m = 3$.

Portanto a equação da reta tangente é $y = 3 + m(x - 1) = 3 + 3(x - 1) = 3x$.

Pauta de Correção:

- Escrever a equação da reta r. [0,25]
- Montar o sistema e impor a condição para se obter a interseção. [0,25]
- Concluir que o sistema tem solução única se, e somente se, $\Delta = 0$. [0,5]
- Calcular o valor de m. [0,25]

[02] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

A *expansão de Cantor* de um número inteiro positivo a é a soma

$$a = a_n\, n! + a_{n-1}\, (n - 1)! + \cdots + a_2\, 2! + a_1\, 1!$$

onde a_i é um inteiro com $0 \leqslant a_i \leqslant i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, e $a_n \neq 0$.

Por exemplo $110 = 4 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$.

(a) Encontre a expansão de Cantor de 719.

(b) Prove, por indução em m, que

$$\sum_{j=1}^{m-1} j \cdot j! = m! - 1, \text{ para todo } m \geqslant 2.$$

Solução

(a) Observando que $6! = 720 > 719$, portanto, o maior valor de n para o qual $n! < 719$ é $n = 5$. Assim, dividindo 719 por $120 = 5!$, encontramos:

$$719 = 5 \cdot 5! + 119.$$

Tomando o resto da divisão acima e dividindo por $24 = 4!$, que é o maior valor na forma de fatorial que divide 119, obtemos:

$$119 = 4 \cdot 4! + 23.$$

Tomando o resto da divisão acima e dividindo por $6 = 3!$, que é o maior valor na forma de fatorial que divide 23, obtemos:

$$23 = 3 \cdot 3! + 5.$$

Tomando o resto da divisão acima e dividindo por $2 = 2!$, que é o maior valor na forma de fatorial que divide 5, obtemos:

$$5 = 2 \cdot 2! + 1.$$

Das equações acima, concluímos que:

$$719 = 5 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!.$$

(b) Para $m = 2$ temos

$$\sum_{j=1}^{2-1} j \cdot j! = \sum_{j=1}^{1} j \cdot j! = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1.$$

Supondo a proposição verdadeira para algum número natural $m \geqslant 2$, provemos que a mesma é também verdadeira para $m + 1$, ou seja, que

$$\sum_{j=1}^{m} j \cdot j! = (m+1)! - 1.$$

Vejamos,

$$\sum_{j=1}^{m} j \cdot j! = m \cdot m! + \sum_{j=1}^{m-1} j \cdot j! = m \cdot m! + m! - 1 = (m+1) \cdot m! - 1 = (m+1)! - 1.$$

Logo, a proposição é verdadeira para $m + 1$ e, consequentemente, para todo $m \geqslant 2$ pertencente aos naturais.

Pauta de Correção:

(a) Determinar a expansão de Cantor do número 719. [0,5]

(b)
- Verificar a validade da proposição para $m = 2$. [0,25]
- Finalizar a prova da indução. [0,5]

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar o primeiro termo $5 \cdot 5!$ da expansão de Cantor do número 719. [0,25]
- Encontrar a expansão de Cantor $5 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1!$ do número 719. [0,25]

(b)
- Verificar a validade da proposição para $m = 2$. [0,25]
- Finalizar a prova da indução. [0,5]

[03] **[1,25]**

Uma expressão exponencial a^b com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ é menor que 1 nos seguintes casos: (i) $a < 1$ e $b > 0$ ou (ii) $a > 1$ e $b < 0$.

Usando essa informação, determine o conjunto solução da inequação

$$|2x+1|^{x^3-6x^2+11x-6} < 1,$$

em que $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

Solução

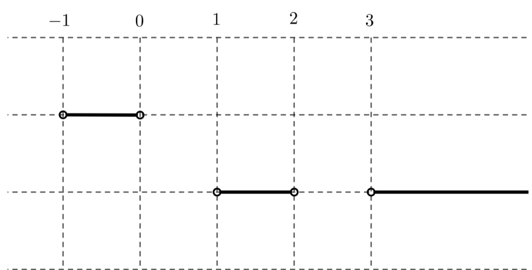
Como $x \neq -\frac{1}{2}$, a base $|2x+1|$ é estritamente maior que zero.

Primeiro caso: $|2x+1| < 1$ e $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$.

$$|2x+1| < 1 \iff -1 < 2x+1 < 1 \iff -2 < 2x < 0 \iff -1 < x < 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \iff 1 < x < 2 \text{ ou } x > 3.$$

Nesse caso não há solução, pois $(-1,0) \cap ((1,2) \cup (3,+\infty)) = \emptyset$.

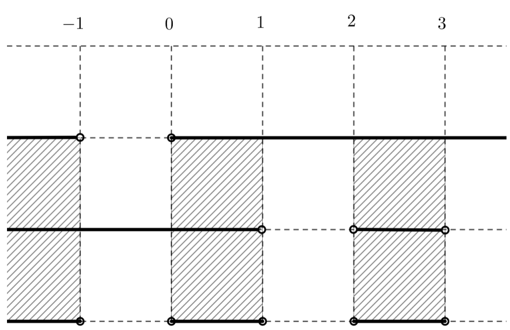


Segundo caso: $|2x+1| > 1$ e $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0$.

$$|2x+1| > 1 \iff 2x+1 < -1 \text{ ou } 2x+1 > 1 \iff x < -1 \text{ ou } x > 0.$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) < 0 \iff x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3.$$

$((-\infty,-1) \cup (0,+\infty)) \cap ((-\infty,1) \cup (2,3)) = (-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (2,3)$.



Logo o conjunto solução é $(-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (2,3)$.

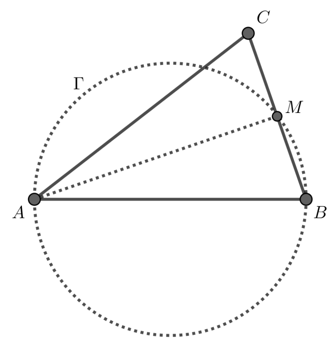
Pauta de Correção:

- Estabelecer o primeiro caso. [0,25]
- Resolver o primeiro caso. [0,25]
- Estabelecer o segundo caso. [0,25]
- Resolver o segundo caso. [0,25]
- Escrever a solução final. [0,25]

[04] **[1,25]**

Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio do segmento BC e Γ a circunferência tal que o segmento AB é um diâmetro.
Prove que $\overline{AB} = \overline{AC}$ se, e somente se, M pertence à circunferência Γ.

Solução



Supondo $\overline{AB} = \overline{AC}$, o triângulo BAC é isósceles de vértice A, portanto a mediana AM é também altura. Desta forma, o triângulo AMB será retângulo, portanto estará inscrito na circunferência Γ, de diamêtro AB.

Se, por outro lado, assumimos que $M \in \Gamma$, então, como AB é diâmetro, $A\hat{M}B = 90°$. Com isso, a mediana AM do triângulo BAC é também uma altura, provando que BAC é isósceles.

Pauta de Correção:

- Indicar que precisa provar os dois "sentidos" da equivalência, mesmo que um deles apresente erro ou não seja feito. $[0, 25]$

Provar que, se $\overline{AB} = \overline{AC}$, então $M \in \Gamma$:

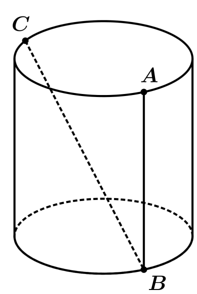
- Dizer que AM é altura do triângulo BAC e concluir que o triângulo AMB é retângulo. [0,25]
- Concluir que $M \in \Gamma$. [0,25]

Provar que, se $M \in \Gamma$, então $\overline{AB} = \overline{AC}$:

- Usar o fato de que $M \in \Gamma$ para concluir que o triângulo AMB é retângulo, logo AM é altura do triângulo ABC. [0,25]
- Concluir que o triângulo BAC é isósceles, logo $\overline{AB} = \overline{AC}$. [0,25]

[05] **[1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]**

No cilindro circular reto da figura, o raio da base mede 3cm e a altura mede 9cm. Sabe-se ainda que o segmento AB é perpendicular às bases e que o comprimento do menor arco AC é, em centímetros, 2π.

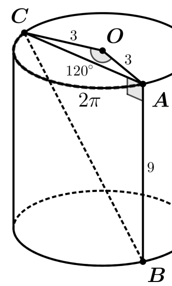


(a) Determine a medida do segmento BC.

(b) Determine o ângulo $A\widehat{B}C$.

Solução

(a) Como o comprimento do menor arco AC é 2π e o comprimento da circunferência da base superior é $2\pi \cdot 3 = 6\pi$, o ângulo central $A\widehat{O}C$ da figura abaixo será dado por $\dfrac{2\pi}{6\pi} \cdot 360°$.



Pela Lei dos Cossenos,

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(120°) \therefore \overline{AC}^2 = 18 - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 27.$$

$$\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{3}.$$

Como AC está contido em uma base, AB e AC são perpendiculares, logo o triângulo BAC é retângulo em A. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \therefore \overline{BC}^2 = 81 + 27 \therefore \overline{BC}^2 = 108 \therefore \overline{BC} = 6\sqrt{3}.$$

(b) Temos que

$$\operatorname{tg} A\widehat{B}C = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Com isso, $A\widehat{B}C = 30°$.

De forma alternativa, poderíamos ter feito

$$\operatorname{sen} A\widehat{B}C = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

ou ainda

$$\cos A\widehat{B}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

que também conduziriam a $A\widehat{B}C = 30°$.

Pauta de Correção:

(a)
- Observar que o ângulo central $A\widehat{O}B$ mede $120°$. [0,25]
- Determinar $\overline{AC}$. [0,25]
- Calcular $\overline{BC}$. [0,25]

(b)
- Observar que $\operatorname{tg} A\widehat{B}C = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, ou que $\operatorname{sen} A\widehat{B}C = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, ou ainda $\cos A\widehat{B}C = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. [0,25]
- Determinar $A\widehat{B}C$. [0,25]

[06] **[1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]**

(a) Mostre que a solução da recorrência

$$\begin{cases} x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0; \\ x_0 = 3; \ x_1 = 45 \end{cases}$$

é da forma $a_n \cdot b_n$ em que a_n é uma progressão aritmética e b_n é uma progressão geométrica.

(b) Encontre uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes, indicando as condições iniciais, cuja solução é a sequência

$$x_n = (a + nr) \cdot q^n$$

em que a, r e q são números reais.

Solução

(a) A equação caraterística dessa recorrência é $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ cuja raiz única é $\lambda = 5$. Logo a solução geral é da forma $x_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot n \cdot 5^n$. Fazendo $n = 0$ e $n = 1$ chegamos ao sistema

$$\begin{cases} 3 = x_0 = C_1 \\ 45 = x_1 = 5C_1 + 5C_2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

Logo a solução é $x_n = 3 \cdot 5^n + 6n \cdot 5^n = (3 + 6n) \cdot 5^n$, onde $a_n = 3 + 6n$ é uma progressão aritmética e $b_n = 5^n$ é uma progressão geométrica.

(b) A equação característica da recorrência procurada deve ter q como única raiz. Assim, deve ser $\lambda^2 - 2q\lambda + q^2 = 0$. O que gera a recorrência $x_{n+2} - 2qx_{n+1} + q^2 x_n = 0$. Os dois primeiros termos da sequência são $x_0 = a$ e $x_1 = (a + r)q$.

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar a solução geral da recorrência. [0,25]
- Encontrar C_1 e C_2. [0,25]
- Escrever a solução na forma de produto. [0,25]

(b)
- Escrever a recorrência. [0,25]
- Determinar os dois primeiros termos. [0,25]

[07] **[1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]**

(a) Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$, onde a e b são números inteiros, então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

(b) Resolva a equação diofantina $X^2 + Y^2 = 637$.

Solução

(a) Considere um número inteiro n e sua divisão por 7, $n = 7q + r$ onde $0 \leqslant r \leqslant 6$. Analisando as possibilidades para os restos da divisão de n^2 por 7 temos

$$n = 7q \Longrightarrow n^2 = 7t$$

$$n = 7q + 1 \Longrightarrow n^2 = 7t + 1$$
$$n = 7q + 2 \Longrightarrow n^2 = 7t + 4$$
$$n = 7q + 3 \Longrightarrow n^2 = 7t + 9 = 7(t + 1) + 2$$
$$n = 7q + 4 \Longrightarrow n^2 = 7t + 16 = 7(t + 2) + 2$$

$$n = 7q + 5 \Longrightarrow n^2 = 7t + 25 = 7(t+3) + 4$$
$$n = 7q + 6 \Longrightarrow n^2 = 7t + 36 = 7(t+5) + 1$$

Assim, os possíveis restos da divisão de um quadrado por 7 são 0, 1, 2 ou 4.

Seja s o resto da divisão de $a^2 + b^2$ por 7. Temos que,

$$7 \mid a \text{ e } 7 \nmid b \Longrightarrow s = 1, 2 \text{ ou } 4$$

$$7 \nmid a \text{ e } 7 \mid b \Longrightarrow s = 1, 2 \text{ ou } 4$$

$$7 \nmid a \text{ e } 7 \nmid b \Longrightarrow s = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6$$

Portanto, se $7 \mid a^2 + b^2$, então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

(b) Suponha x e y inteiros tais que $x^2 + y^2 = 637$.
Temos que $637 = 7^2 \cdot 13$, logo $7 \mid x^2 + y^2$.
Usando o item (a), concluimos que $x = 7t$ e $y = 7k$, com t, k inteiros. Segue que $x^2 + y^2 = 7^2 \cdot t^2 + 7^2 \cdot k^2 = 7^2 \cdot 13$, donde $t^2 + k^2 = 13$.
Concluimos que $t^2 = 4$ e $k^2 = 9$ (ou $t^2 = 9$ e $k^2 = 4$) , portanto

$$x = \pm 14 \text{ e } y = \pm 21$$

ou

$$x = \pm 21 \text{ e } y = \pm 14$$

Portanto, os pares (x, y) soluções da equação são:
$(14, 21), (14, -21), (-14, 21), (-14, -21), (21, 14), (21, -14), (-21, 14)$ *e* $(-21, -14)$.

Solução Alternativa item (a)

Dado um número inteiro n, $n \equiv r \mod 7$ onde $0 \leqslant r \leqslant 6$. Segue que,

$$n \equiv 0 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 0 \mod 7$$

$$n \equiv 1 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \mod 7$$
$$n \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \mod 7$$
$$n \equiv 3 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 2 \mod 7$$
$$n \equiv 4 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 2 \mod 7$$
$$n \equiv 5 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 4 \mod 7$$
$$n \equiv 6 \mod 7 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \mod 7$$

Suponha que $7 \nmid a$ ou $7 \nmid b$, isto é, $a \not\equiv 0 \mod 7$ ou $b \not\equiv 0 \mod 7$.

Analisando todas as possibilidades obtemos $a^2 + b^2 \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \mod 7$, logo $a^2 + b^2 \not\equiv 0 \mod 7$. Portanto, se $7 \mid a^2 + b^2$, então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

Pauta de Correção:

(a)
- Determinar os restos da divisão de um quadrado por 7. [0,25]
- Determinar os restos da divisão de $a^2 + b^2$ por 7. [0,25]
- Concluir o resultado. $[0, 25]$

(b)
- Usar o item (a) e concluir que $7 \mid x$ e $7 \mid y$. [0,25]
- Determinar as soluções. [0,25]

[08] **[1,25]**

Seja m um número natural. Dois números inteiros a e b são ditos congruentes módulo m se os restos da divisão euclidiana de a e b por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \mod m$$

Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Prove que $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m \mid b - a$.

Solução

Sejam $a = mq_1 + r_1$ e $b = mq_2 + r_2$, com $0 \leqslant r_1, r_2 < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente.

Suponha que $a \equiv b \bmod m$. Segue, da definição, que $r_1 = r_2$ e daí $b - a = m(q_2 - q_1) + r_2 - r_1 = m(q_2 - q_1)$, portanto $m|b - a$.

Reciprocamente, suponha que $m|b - a$. Como $r_2 - r_1 = b - a - m(q_2 - q_1)$ e $m|b - a$, concluimos que $m|r_2 - r_1$. Sendo $0 \leqslant r_1, r_2 < m$, temos que $|r_2 - r_1| < m$, logo $r_2 = r_1$. Portanto, $a \equiv b \bmod m$.

Pauta de Correção:

- Escreveu as divisões de a e b por m. [0,25]
- Supondo que $a \equiv b \bmod m$, considerou a diferença $b - a$. [0,25]
- Concluiu que $m|b - a$. [0,25]
- Supondo que $m|b - a$, concluiu que $m|r_2 - r_1$. [0,25]
- Concluiu que $a \equiv b \bmod m$. [0,25]