ENQ – 2021.1 – Gabarito

[01] [**1,25**]

Determine um número natural n tal que $\frac{n}{2}$ é um quadrado, $\frac{n}{3}$ é um cubo e $\frac{n}{5}$ é uma quinta potência.

Solução

Considere n da forma $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\theta$, com α, β e θ maiores do que 1. Assim,

$$\frac{n}{2} = 2^{\alpha-1} \cdot 3^\beta \cdot 5^\theta, \quad \frac{n}{3} = 2^\alpha \cdot 3^{\beta-1} \cdot 5^\theta \quad \text{e} \quad \frac{n}{5} = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^{\theta-1}$$

Temos que

$\frac{n}{2}$ é um quadrado se, e somente se, $\alpha - 1, \beta$ e θ são pares;

$\frac{n}{3}$ é um cubo se, e somente se, $\alpha, \beta - 1$ e θ são múltiplos de 3 e

$\frac{n}{5}$ é uma potência quinta se, e somente se, α, β e $\theta - 1$ são múltiplos de 5.

Portanto, devemos ter

$$\begin{cases} \alpha \text{ ímpar, múltiplo de 3 e 5} \\ \beta \text{ par}, \beta - 1 \text{ múltiplo de } 3, \beta \text{ múltiplo de 5} \\ \theta \text{ par, múltiplo de 3 e } \theta - 1 \text{ múltiplo de 5} \end{cases}$$

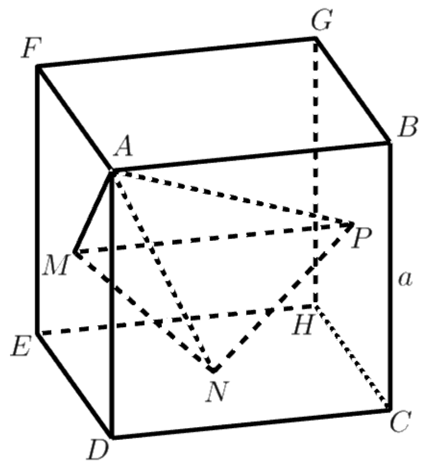
Escolhendo $\alpha = 15, \beta = 10$ e $\theta = 6$ obtemos $n = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

Pauta de Correção:

- Escrever $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\theta$. [0,25]
- Determinar as condições sobre os expoentes. [0,5]
- Determinar um n nas condições exigidas. [0,5]

[02] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

O cubo $ABCDEFGH$ da figura tem aresta igual a a. Os pontos M, N e P são os centros das faces $AFED$, $DEHC$ e $CBGH$, respectivamente.



(a) Determine o ângulo entre as faces MPA e MPN do tetraedro $AMPN$.

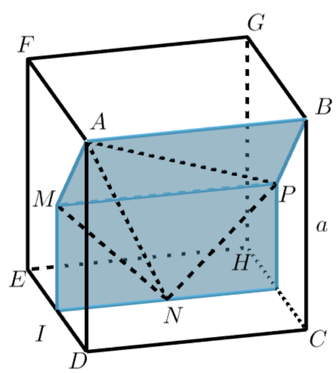
(b) Determine o volume do tetraedro $AMPN$.

Solução

(a) Como M, N e P são os centros das faces do quadrado em que estão, o plano contendo a face MNP do tetraedro é paralelo às faces $ABCD$ e $FGHE$ do cubo, cortando as arestas AF, BG, DE e CH em seus pontos médios.

Pelo mesmo motivo, o segmento PB é paralelo a AM e então o plano contendo a face AMP contém também o ponto B. Mais do que isto, ele é o plano contendo as arestas AB e EH do cubo.

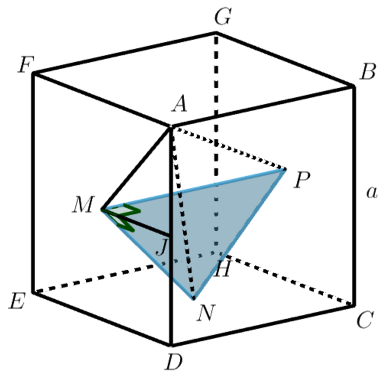
Estes dois planos estão representados na figura abaixo, na qual I é o ponto médio de ED.



Como AM e MI são perpendiculares a MP, que é segmento comum aos planos contendo as faces AMP e MNP, o ângulo entre estas faces é o ângulo $A\hat{M}I$. Como AM está na diagonal da face $ADEF$, e como MI é paralelo a AD, temos $A\hat{M}I = 135°$.

Assim, o ângulo entre as faces AMP e MNP é $135°$. Cabe observar, como informação complementar, que este **não** é o menor ângulo entre os planos contendo as faces, que seria $45°$.

(b) Como visto no item anterior, o plano contendo a face MNP do tetraedro é paralelo à face $ABCD$ do cubo. Assim, se pensarmos em MNP como base do tetraedro, a altura correspondente será o segmento MJ, onde J é o ponto médio de AD. De fato, MJ é perpendicular ao plano contendo MNP, pois é perpendicular ao plano $ABCD$, paralelo a MNP.



Observando a figura do item (a), a área S da base MNP é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{MI} \cdot \overline{MP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$$

e, como temos $\overline{MJ} = \dfrac{a}{2}$, o volume do tetraedro será dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{MJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Mostrar que o plano contendo a face MNP do tetraedro é paralelo às faces $ABCD$ e $FGHE$. [0,25]
- Concluir que o ângulo entre as faces é de 135°. Considerar mesmo que o aluno calcule o menor ângulo entre os planos contendo as faces, obtendo assim 45°. [0,25]

(b)
- Escolher a face MPN como a base do tetraedro para o cálculo do volume. [0,5]
- Determinar o volume. [0,25]

[03] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere os polinômios $p(X) = X^4 - 4X - 1$ e $q(X) = (X^2 + a)^2 - 2(X + b)^2$.

(a) Encontre os valores de a e b tais que os polinômios $p(X)$ e $q(X)$ sejam idênticos.

(b) Determine as raízes reais de $p(X)$.

Solução

(a) Temos que $q(X) = (X^2 + a)^2 - 2(X + b)^2 = X^4 + 2aX^2 + a^2 - 2(X^2 + 2bX + b^2)$.

Logo $q(X) = X^4 + (2a - 2)X^2 - 4bX + a^2 - 2b^2$.

Então $p(X) = q(X) \Leftrightarrow X^4 - 4X - 1 = X^4 + (2a - 2)X^2 - 4bX + a^2 - 2b^2 \Leftrightarrow 2a - 2 = 0, -4b = -4$ e $a^2 - 2b^2 = -1$.

Portanto $a = b = 1$ e $q(X) = (X^2 + 1)^2 - 2(X + 1)^2$.

(b) As raízes de p são obtidas resolvendo a equação $p(x) = 0$, ou seja, $x^4 - 4x - 1 = 0$.

Como $p(X) = q(X)$ basta resolvermos a equação $q(x) = 0$, isto é, $(x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0$.

Logo $(x^2 + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}(x + 1)$.

Então temos que resolver $x^2 + 1 = \sqrt{2}(x + 1)$ e $x^2 + 1 = -\sqrt{2}(x + 1)$, ou seja,

$x^2 - \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2}) = 0$ e $x^2 + \sqrt{2}x + (1 + \sqrt{2}) = 0$.

Agora resolveremos as duas equações do segundo grau:

- $x^2 - \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4(1 - \sqrt{2})}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2 + 4\sqrt{2}}}{2}$,
- $x^2 + \sqrt{2}x + (1 + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4(1 + \sqrt{2})}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2 - 4\sqrt{2}}}{2}$ e essas duas raízes não são reais.

Portanto as raízes reais de p são $x_1 = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{-2 + 4\sqrt{2}}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{-2 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

Pauta de Correção:

(a) Determinar os valores de a e b. [0,5]

(b)
- Encontrar as duas equações do segundo grau. [0,25]
- Verificar que uma equação não tem soluções reais. [0,25]
- Determinar as duas raízes de p. [0,25]

[04] **[1,25]**

Sejam r e s raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são números reais dois a dois distintos, com a e c não nulos. Suponha que, **nesta ordem**, a, c e b estão em progressão aritmética e também que, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}, r + s, r^2 + s^2$ estão em progressão geométrica, nesta ordem. Mostre que $\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$.

Solução

Primeiro observamos que $\frac{c}{a} = rs$. Vamos denotar essa quantidade como k.

Como a, c, b estão em P.A. temos que $2c = a + b$. Dividindo tudo por a, temos que $2k = 1 + \frac{b}{a}$.

Agora, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}, r + s, r^2 + s^2$ estão em P.G.

$$\frac{r+s}{\frac{r+s}{rs}} = \frac{r^2+s^2}{r+s} \iff r^2 + s^2 = rs(r+s)$$

Por outro lado, $r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs$, o que nos dá $(r+s)^2 - 2rs = rs(r+s)$.

Como $r + s = -\frac{b}{a} = 1 - 2k$, podemos substituir na identidade acima e obter

$$(1-2k)^2 - 2k = k\,(1-2k)\,.$$

O que nos leva à seguinte equação quadrática

$$6k^2 - 7k + 1 = 0,$$

cujas soluções são $k = 1$ ou $k = \frac{1}{6}$.

Considerando que $a \neq c$, temos que $k = \frac{c}{a}$ não pode ser igual a 1, logo, deve-se ter $\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$.

Pauta de Correção:

- Usar a fórmula do produto das raízes da equação quadrática $\frac{c}{a} = rs$ [0,25]
- Usar a fórmula da soma das raízes da equação quadrática $-\frac{b}{a} = r + s$ [0,25]
- Usar a fórmula da PA de três termos. [0,25]
- Usar a fórmula da PG de três termos. [0,25]
- Combinar as fórmulas corretamente e concluir o resultado. [0,25]

[05] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,25; (c)=0,25; (d)=0,25]**

Dizemos que uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **par** quando $F(-x) = F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e que é **ímpar** quando $F(-x) = -F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Dê exemplo de uma função par, uma função ímpar e uma que não seja nem par nem ímpar.

Para os itens a seguir, dada uma função qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere as funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ e $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

(b) A função g é par, ímpar ou nem par nem ímpar?

(c) A função h é par, ímpar ou nem par nem ímpar?

(d) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Solução

(a) $F(x) = x^2$ é uma função par, $G(x) = x$ é ímpar e $H(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar, pois $H(1) = 2$ e $H(-1) = 0$.

(b) A função g é par. De fato,
$g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$.

(c) A função h é ímpar. De fato,
$h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$.

(d) Note que $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x)$.
Vimos nos itens (b) e (c) que g é par e h é ímpar.

Pauta de Correção:

(a) Dar o exemplo de uma função par e uma ímpar. [0,25]
Dar o exemplo de uma função nem par nem ímpar. [0,25]

(b) Provar que g é par. [0,25]

(c) Provar que h é ímpar. [0,25]

(d) Mostrar que f pode ser escrita como a soma de uma função par com uma ímpar. [0,25]

[06] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]**

No sistema de numeração posicional duodecimal (base 12) os doze símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A e B são utilizados como algarismos, sendo A = 10 e B = 11. Assim, por exemplo, o número 47, é representado no sistema duodecimal como $3B_{12}$, já que $47 = 3 \times 12 + 11$.

(a) Prove que um número expresso no sistema duodecimal é um múltiplo de 3 se, e somente se, o algarismo das unidades é também múltiplo de 3.

(b) Quantos são os múltiplos de 3 que possuem quatro algarismos distintos quando representados no sistema duodecimal?

(c) Represente o resultado obtido no item (b) no sistema de numeração posicional duodecimal.

Solução

(a) Seja n um número inteiro de k algarismos representado em um sistema de numeração de base 12. Logo

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 12^i$$

em que os a_i representam os algarismos de n no sistema duodecimal. Em particular, a_0 representa o algarismo das unidades. Queremos provar que $3|n \iff 3|a_0$ são equivalentes. Para a ida, suponhamos $3|n$. Isto equivale a $n \equiv 0 \mod 3$. Assim,

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 12^i \equiv 0 \mod 3.$$

Notando que o único termo do somatório que não é múltiplo de 12 é aquele para o qual $i = 0$, vamos reescrevê-lo isolando este termo

$$a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \cdot 12^i \equiv 0 \mod 3.$$

Agora podemos colocar 12 em evidência, obtendo

$$a_0 + 12\sum_{i=1}^{k-1} a_i \cdot 12^{i-1} \equiv 0 \mod 3.$$

Como $12 = 3 \times 4$, então

$$a_0 \equiv 0 \mod 3 \iff 3|a_0.$$

Isso conclui a ida. A volta consiste em notar que todos os passos feitos aqui são reversíveis.

(b) Queremos escrever um número com quatro algarismos distintos no sistema duodecimal de modo que este seja um múltiplo de 3. Pelo que vimos no item (a), o algarismos das unidades deve ser um dos algarismos 0, 3, 6 ou 9. E para que possua, de fato, 4 algarismos, o algarismo de maior valor relativo deve ser diferente de 0. Assim, precisamos dividir nosso problema em dois casos. O caso I é aquele em que o algarismo das unidades é zero e o caso II aquele em que este vale 3, 6 ou 9.

Em ambos os casos nosso problema será dividido nas seguintes etapas:

(i) escrever o algarismo das unidades (1 possibilidade no caso I e 3 possibilidades no caso II);

(ii) escrever o algarismo de maior valor relativo, que deve ser distinto daquele escolhido na etapa anterior (11 possibilidades no caso I e 10 possibilidades no caso II);

(iii) escrever cada um dos outros algarismos, os quais precisam ser diferentes dos dois escolhidos nas etapas anteriores e também distintos entre si.

No caso 1, o número de possibilidades será $1 \times 11 \times (10 \times 9) = 990$.

No caso 2, o número de possibilidades será $3 \times 10 \times (10 \times 9) = 2.700$.

Somando o número de possibilidades de cada caso, os quais não possuem interseção, concluímos que existem 3.690 múltiplos de 3 representados por quatro algarismos distintos no sistema duodecimal.

(c) Para convertermos a representação de um número do sistema decimal para o sistema duodecimal devemos realizar a divisão inteira por 12 sucessivas vezes (isto é, dividir por 12 o quociente da divisão anterior) até obtermos um quociente menor que 12. A representação duodecimal terá como algarismos o quociente da última divisão seguido dos restos de cada divisão, na ordem inversa daquela segundo a qual foram obtidos no processo.

Como

$$3.690 = 307 \times 12 + \mathbf{6}$$
$$307 = 25 \times 12 + \mathbf{7}$$
$$25 = \mathbf{2} \times 12 + \mathbf{1}$$

temos que $3.690 = 2.176_{12}$.

Pauta de Correção:

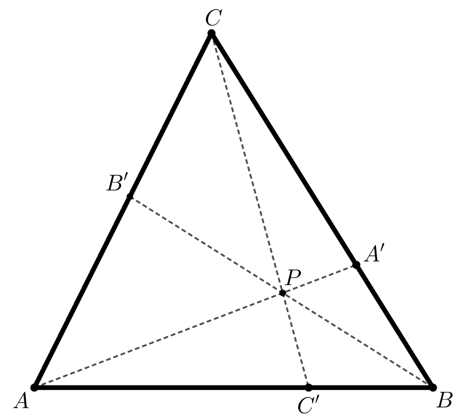
(a)
- Provar uma das implicações. [0,25]
- Provar a recíproca. [0,25]

(b)
- Encontrar a quantidade de representações de um dos casos. [0,25]
- Encontrar o total de representações. [0,25]

(c) Apresentar a representação duodecimal do resultado do item (b), mesmo que tenha errado o item (b). [0,25]

[07] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Um segmento que tem um vértice de um triângulo como uma de suas extremidades e a outra extremidade sobre o lado oposto a esse vértice é chamado de *ceviana interna* do triângulo. O Teorema de Ceva afirma que, em um triângulo ABC, as cevianas internas AA', BB' e CC' se intersectam em um mesmo ponto se, e somente se, $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$.



Prove, **utilizando o Teorema de Ceva**, que em um triângulo ABC:

(a) as três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.

(b) as três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.

Solução

(a) Neste caso os pontos A', B' e C' são os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Assim, $\overline{BA'} = \overline{A'C}$, $\overline{CB'} = \overline{B'A}$ e $\overline{AC'} = \overline{C'B}$, de modo que $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$. Portanto, $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$ e, pelo teorema de Ceva, as três medianas concorrem no mesmo ponto.

(b) Considerando a bissetriz interna AA', o teorema da bissetriz interna nos garante que $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. De modo análogo, usando esse mesmo teorema, mas considerando as bissetrizes internas BB' e CC', obtemos, respectivamente, $\dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Portanto, $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1$. Assim, pelo teorema de Ceva, concluímos que as três bissetrizes internas concorrem no mesmo ponto.

Pauta de Correção:

(a)
- Observou que $\overline{BA'} = \overline{A'C}$, $\overline{CB'} = \overline{B'A}$ e $\overline{AC'} = \overline{C'B}$. [0,25]
- Provou o resultado. [0,25]

(b)
- Fez uso do teorema da bissetriz interna para concluir $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. [0,25]
- Fez uso do teorema da bissetriz interna para concluir $\dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. [0,25]
- Concluiu a prova. [0,25]

[08] **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, denotamos o **maior divisor comum de** x **e** y por (x, y).

(a) Seja $a \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 1$, e $m \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (m, a - 1)$$

(b) Seja m um número natural. Mostre que

$$16 \,|\, (5^m - 1) \Longleftrightarrow 4 \,|\, m$$

Solução

(a) Temos que $a^m - 1 = (a-1)(a^{m-1} + \cdots + a + 1)$, logo

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \cdots + (a - 1) + m - 1 + 1$$

Como $a - 1 | a^k - 1$, para todo k natural, temos que

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = \ell(a - 1) + m, \text{ onde } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (\ell(a-1) + m, a - 1) = (m, a - 1)$.

(b) Suponha que $16 | 5^m - 1$. Temos que $5^m - 1 = 16k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e pelo item (a)

$$\left(\frac{5^m - 1}{5 - 1}, 5 - 1\right) = (m, 5 - 1)$$

Obtemos $\left(\frac{16k}{4}, 4\right) = (m, 4)$, logo $4 = (4k, 4) = (m, 4)$. Portanto, $4 | m$.

Suponha que $4 | m$. Temos que $m = 4k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e
$5^m - 1 = 5^{4k} - 1 = (5^4)^k - 1$.
Como $624 = 5^4 - 1 | 5^{4k} - 1 = 5^m - 1$ e $16 | 624$, concluimos que $16 | 5^m - 1$.

(b) **Solução Alternativa**

Pelo item (a) temos $\left(\frac{5^m - 1}{5 - 1}, 5 - 1\right) = (m, 5 - 1)$, logo

$$\left(\frac{5^m - 1}{4}, 4\right) = (m, 4)$$

Portanto,

$$4 | m \Longleftrightarrow 4 = (m, 4) = \left(\frac{5^m - 1}{4}, 4\right) \Longleftrightarrow 4 \left| \frac{5^m - 1}{4} \right. \Longleftrightarrow 16 | 5^m - 1$$

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever $\frac{a^m - 1}{a - 1} = k(a - 1) + m$. [0,25]
- Concluir o resultado.$[0, 25]$

(b)
- Provar que $16 | 5^m - 1 \Longrightarrow 4 | m$. [0,5]
- Provar que $4 | m \Longrightarrow 16 | 5^m - 1$. [0,25]