ENQ – 2021.2 – Gabarito

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Prove que $10^n - 1$ é divisível por 9, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Use o item (a) para provar o seguinte critério de divisibilidade por 9: "Um número natural é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for divisível por 9".

Observação: Lembre-se que todo número natural a pode ser representado no sistema decimal por

$$a = a_m \cdot 10^m + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \text{ em que } m \in \mathbb{N} \text{ e } a_m \neq 0.$$

Solução

(a) O resultado vale será provado por indução em n. Para $n = 1$, pois $10^1 - 1 = 9$ é divisível por 9.
Suponha que o resultado vale para $k \geqslant 1$, ou seja, que existe ℓ inteiro tal que $10^k - 1 = 9\ell$. Assim, $10^k = 9\ell + 1$.

Para $k+1$ temos que $10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 = 10 \cdot (9\ell + 1) - 1 = 9 \cdot (10\ell + 1)$ e, assim, segue o resultado pelo princípio de indução matemática.

(b) Sejam $a = a_m \cdot 10^m + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$ e $S = a_m + \cdots + a_1 + a_0$ a soma dos algarismos de a.
Note que $a - S = a - (a_m + \cdots + a_1 + a_0) = a_m \cdot 10^m + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 - (a_m + \cdots + a_1 + a_0) = a_m \cdot (10^m - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10^1 - 1)$.

Pelo item (a), sabemos que que $10^k - 1$ é múltiplo de 9, para todo $k \geqslant 1$. Daí, concluímos que $a - S = 9q$. Desta igualdade segue o critério de divisibilidade por 9:

Se $a = 9r$, então $S = 9r - 9q = 9(r - q)$. Reciprocamente, se $S = 9p$, então $a = 9p + 9q = 9(p + q)$.

Pauta de Correção:

(a)
- Fazer o caso $n = 1$ e/ou escrever/citar a hipótese de indução. [0,25]
- Fazer o passo indutivo e concluir o resultado. [0,25]

(b)
- Desenvolver a diferença $a - S$. [0,25]
- Usar o item (a) para concluir que $a - S$ é múltiplo de 9. [0,25]
- Mostrar que o fato anterior implica o critério pedido. [0,25]

Solução Alternativa

(a) Sabemos que $10 \equiv 1 \bmod 9$. Logo, para qualquer $n \geqslant 1$, temos $10^n \equiv 1 \bmod 9$, ou seja, $10^n - 1$ é divisível por 9.

(b) Seja $a = a_m \cdot 10^m + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Para cada $k = 0, ..., m$ temos

$$10^k \equiv 1 \bmod 9 \iff a_k \cdot 10^k \equiv a_k \bmod 9$$

Somando as congruências acima para todo $k = 0, ..., m$:

$$a_m \cdot 10^m + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_m + \cdots + a_1 + a_0 \bmod 9$$

Ou seja,

$$a \equiv a_m + \cdots + a_1 + a_0 \bmod 9$$

o que é equivalente a dizer que a e $a_m + \cdots + a_0$ deixam o mesmo resto na divisão por 9. Daí, um deles é múltiplo de 9 (congruente a 0 mod 9) se, e somente se, ou outro for.

Pauta de Correção:

(a) Usar que $10 \equiv 1 \bmod 9$ para concluir o item. [0,5]

(b)
- Usar o item (a) e deduzir que $a_k \cdot 10^k \equiv a_k \bmod 9$. [0,25]
- Concluir que a e $a_m + \cdots + a_1 + a_0$ são congruentes módulo 9. [0,25]
- Mostrar que o fato anterior é equivalente ao critério enunciado. [0,25]

Questão 02 [**1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,50**]

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in (0, +\infty)$.

(a) Mostre que $f(1) = 0$.

(b) Mostre, por indução, que para todo $a > 0$ e todo $n \geqslant 1$ natural, tem-se $f(a^n) = nf(a)$.

(c) Mostre que para todo $a > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(a^{-n}) = -nf(a)$.

Solução

(a)
$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \iff f(1) = 0.$$

(b) Para $n = 1$, temos pela hipótese do enunciado, $f(a^1) = f(a) = 1 \cdot f(a)$.
Suponha, agora, válido para $n = k$, isto é, $f(a^k) = kf(a)$ e vamos calcular para $n = k + 1$:
$$f(a^{k+1}) = f(a^k \cdot a) = f(a^k) + f(a) = kf(a) + f(a) = (k + 1)f(a).$$
A segunda igualdade vale pela hipótese do problema e a penúltima pela hipótese de indução.

(c)
$$0 = f(1) = f(a^0) = f(a^{n-n}) = f(a^n \cdot a^{-n}) = f(a^n) + f(a^{-n}) = nf(a) + f(a^{-n})$$
$$\iff f(a^{-n}) = -nf(a).$$

Pauta de Correção:

(a) Provar que $f(1) = 0$. [0,25]

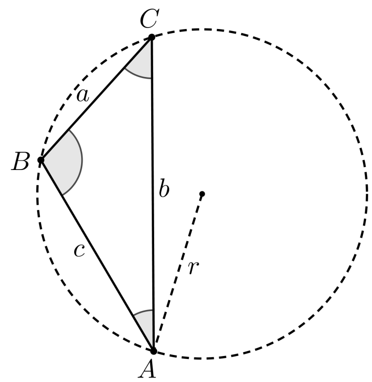
(b)
- Provar a base da indução. [0,25]
- Provar o passo indutivo. [0,25]

(c) Realizar a prova solicitada. [0,5]

Questão 03 [1,25]

Considere um triângulo ABC de lados a, b e c, conforme a figura, e seja r o raio do círculo circunscrito a este triângulo. Prove a lei dos senos:

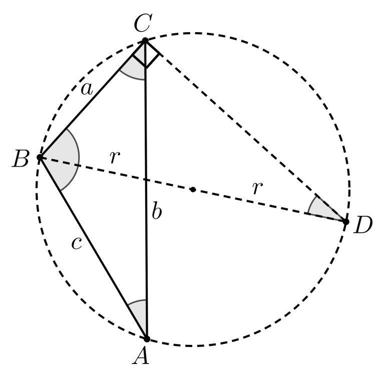
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2r$$



Solução

Considere o triângulo BCD, construído de tal modo que BD seja um diâmetro, conforme a figura. Evidentemente os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes, já que ambos estão inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco. Como o triângulo BCD é reto em C, já que está inscrito em uma semicircunferência, então

$$sen\,\hat{A} = sen\,\hat{D} = \frac{a}{2r}.$$



Procedendo do mesmo modo com relação aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ concluímos que

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{2r} \qquad \text{e} \qquad sen\,\hat{C} = \frac{c}{2r}.$$

Isolando $2r$ nas três equações obtidas anteriormente chegamos a

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} = 2r,$$

provando assim a lei dos senos, como era nossa intenção.

Pauta de Correção:

- Construir o triângulo inscrito na semicircunferência. $[0,25]$
- Argumentar que ângulos inscritos que determinam o mesmo arco são congruentes. $[0,25]$
- Argumentar que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo. $[0,25]$
- Encontrar a relação $sen\,\hat{A} = \dfrac{a}{2r}$ ou uma de suas equivalentes para $\hat{B}$ ou $\hat{C}$. $[0,25]$
- Argumentar que o procedimento para os outros dois ângulos é análogo e finalizar a prova. $[0,25]$

Questão 04 [1,25]

Sabendo que $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ e que $54° + 36° = 90°$, calcule $\text{sen}\,(18°)$.

Solução

Tomando $x = 18°$ e usando o fato de que $\cos(54°) = \text{sen}\,(36°)$,

$$\cos(54°) = 4\cos^3(18°) - 3\cos(18°),$$

$$\text{sen}\,(36°) = 4\cos^3(18°) - 3\cos(18°).$$

como

$$\text{sen}\,(36°) = 2\text{sen}\,(18°)\cos(18°),$$

teremos

$$2\ \text{sen}\,(18°) = 4\ \cos^2(18°) - 3.$$

Seja $y = \text{sen}\,(18°)$, temos então que,

$$4y^2 + 2y - 1 = 0,$$

donde

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

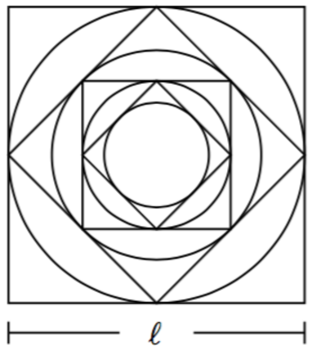
$$\text{ou seja} \quad \text{sen}\,(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Pauta de Correção:

- Escrever que $\cos(54°) = \text{sen}\,(36°)$. [0,25]
- Concluir que $\text{sen}\,(36°) = 4\cos^3(18°) - 3\cos(18°)$. [0,25]
- Escrever que $\text{sen}\,(36°) = 2\text{sen}\,(18°)\cos(18°)$. [0,25]
- Concluir que $2\ \text{sen}\,(18°) = 4\ \cos^2(18°) - 3$, ou equivalente. [0,25]
- Concluir que $\text{sen}\,(18°) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. [0,25]

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,50]

Na figura abaixo, a partir de um quadrado de lado ℓ forma-se uma sequência de quadrados e círculos em que cada quadrado é formado unindo os pontos médios do quadrado imediatamente anterior e todos os círculos estão inscritos em algum quadrado. Sejam ℓ_n o lado do n-ésimo quadrado e r_n o raio do n-ésimo círculo.



(a) Determine a relação entre ℓ_n e r_n.

(b) Encontre a soma P dos perímetros dos infinitos quadrados em função de ℓ.

(c) Obtenha a soma A das áreas dos infinitos círculos em função de ℓ.

Solução

(a) Como o n-ésimo círculo está inscrito no n-ésimo quadrado, seu diâmetro é igual ao lado desse quadrado, ou seja $\ell_n = 2r_n$.

(b) Notando que o lado do quadrado Q_{n+1} corresponde à diagonal de um quadrado cujo lado mede $\dfrac{\ell_n}{2}$ concluímos que $\ell_{n+1} = \dfrac{\ell_n\sqrt{2}}{2}$, ou seja, uma vez que o perímetro de cada quadrado é o quádruplo de seu lado, os perímetros da sequência Q_n de quadrados formam uma PG de razão $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cujo primeiro termo igual a 4ℓ. Logo, a soma P procurada é dada pela soma dos termos desta PG infinita, isto é, $P = \dfrac{4\ell}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 4\ell(2+\sqrt{2})$.

(c) Uma vez que, pelo item (b), $\ell_{n+1} = \dfrac{\ell_n\sqrt{2}}{2}$, concluímos, pelo item (a), que $r_{n+1} = \dfrac{r_n\sqrt{2}}{2}$. Como a razão entre as áreas de dois círculos é dada pelo quadrado da razão entre seus raios, concluímos que as áreas da sequência de círculos C_n é também uma PG cujo primeiro termo vale $\pi r_1^2 = \dfrac{\pi l^2}{4}$ e cuja razão é igual a $\dfrac{1}{2}$. Dessa forma, podemos novamente utilizar a fórmula da soma da PG infinita para concluir que a soma procurada é dada por $A = \dfrac{\pi l^2}{2}$.

Pauta de Correção:

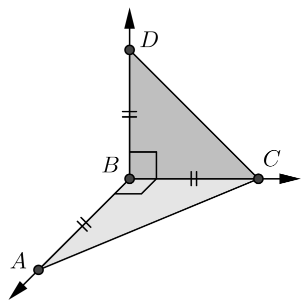
(a) Apresentar a relação correta. [0,25]

(b)
- Observar que a sequência dos perímetros formava uma PG infinita, identificando a razão e o primeiro termo. [0,25]
- Calcular corretamente a soma da PG infinita. [0,25]

(c)
- Observar que a sequência das áreas formava uma PG infinita, identificando a razão e o primeiro termo. [0,25]
- Calcular corretamente a soma da PG infinita. [0,25]

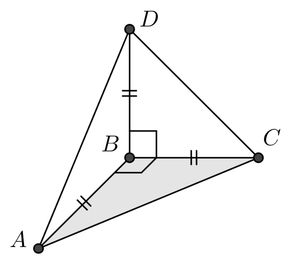
Questão 06 [1,25]

Dois triângulos ABC e BCD são isósceles, retângulos em B e contidos em planos perpendiculares, conforme figura. Determine o volume do sólido $ABCD$ em função da medida a do segmento AB.



Solução

O sólido $ABCD$ é uma pirâmide, conforme figura abaixo.



As retas BA e BD são perpendiculares à reta BC de interseção entre os planos, assim, o ângulo $A\hat{B}D$ entre essas retas define o ângulo entre os planos. Como é dito que os planos são perpendiculares, temos então que $A\hat{B}D = 90°$. Com isso, BD é perpendicular ao plano da base ABC.

Tomando ABC como base da pirâmide, a altura da pirâmide relativa à base ABC será o segmento BD.

Observe que o triângulo ABC é retângulo isósceles, logo $\overline{BC} = \overline{AB} = a$ e a área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Como BD é congruente a AB, temos também $\overline{BD} = a$, logo a altura da pirâmide relativa à face ABC é a. Assim, o volume da pirâmide $ABCD$ é dado por

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Pauta de Correção:

- Considerar (escrever ou esboçar) a base ABC e a altura BD (ou outra configuração equivalente) [0,25]
- Justificar o fato de BD ser altura relativa à base ABC [0,25]
- Calcular a área da base [0,5]
- Obter o volume final correto [0,25]

Questão 07 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Um dado não viciado é lançado duas vezes. Neste contexto, em cada item abaixo, calcule a probabilidade de:

(a) a soma dos números obtidos ser um número ímpar.

(b) obter dois números menores do que 3.

(c) obter dois números pares.

Solução

O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \cdot 6 = 36$, todos com a mesma possibilidade de ocorrência.

(a) No primeiro lançamento temos 6 possibilidades. Para cada escolha, como a paridade no segundo lançamento tem que ser diferente, temos 3 possibilidades, logo 18 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(b) No primeiro lançamento temos 2 possibilidades e no segundo também 2 possibilidades, logo 4 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(c) No primeiro lançamento temos 3 possibilidades e no segundo também 3 possibilidades, logo 9 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

Pauta de Correção:

- Responder o item (a). [0,5]
- Responder o item (b). [0,5]
- Responder o item (c). [0,25]

Questão 08 [1,25]

Determine o resto da divisão por 19 do número

$$S = 1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + \cdots + 95^{18}.$$

Solução

Pelo Pequeno Teorema de Fermat tem-se, para todo inteiro a tal que $(a, 19) = 1$, que

$$a^{18} \equiv 1 \text{ mod } 19$$

Por outro lado, se $(a, 19) \neq 1$ então $19|a$ e neste caso

$$a^{18} \equiv 0 \text{ mod } 19$$

Como temos cinco múltiplos de 19 entre 1 e 95: $1 \cdot 19, 2 \cdot 19, 3 \cdot 19, 4 \cdot 19$ e $5 \cdot 19 = 95$, concluimos que

$$S \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = 90 \text{ mod } 19$$

Portanto,

$$S \equiv 14 \text{ mod } 19$$

e o resto é igual a 14.

Pauta de Correção:

- Usar o Pequeno Teorema de Fermat, no caso $(a, 19) = 1$. $[0, 25]$
- Observar o caso em que $19|a$. $[0, 25]$
- Determinar a quantidade de múltiplos de 19.$[0, 25]$
- Concluir que $S \equiv 90$ mod 19. $[0, 25]$
- Determinar o resto. $[0, 25]$