ENQ – 2022.1 – Gabarito

Questão 01 [**1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,25; (c)=0,75**]

As equações $x^4 + bx^2 + c = 0$ e $x^3 + x^2 - 37x + 35 = 0$ possuem duas raízes distintas comuns.

(a) Determine as raízes da segunda equação.

(b) Mostre que se α é raiz da primeira equação então $-\alpha$ também o é.

(c) Determine todos os possíveis valores de b e c na primeira equação.

Solução

(a) Na segunda equação, começamos observando que uma das raízes é igual à 1:

$$1 + 1 - 37 + 35 = 0$$

Escrevendo $x^3 + x^2 - 37x + 35 = (x-1)(x^2 + 2x - 35)$ tem-se que

$$x^3 + x^2 - 37x + 35 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x^2 + 2x - 35 = 0$$

Portanto, as raízes são $x = 1, 5, -7$.

(b) Suponha α raiz da primeira equação, isto é, $\alpha^4 + b\alpha^2 + c = 0$.

Como $(-\alpha)^4 + b(-\alpha)^2 + c = \alpha^4 + b\alpha^2 + c = 0$, concluímos que $-\alpha$ também é uma raiz.

(c) Como as equações possuem duas raízes comuns, vamos analisar as três possibilidades:

(1) As raízes comuns são 1 e 5. Neste caso, usando o item (b) as raízes da primeira equação são: $1, -1, 5, -5$ e assim

$$x^4 + bx^2 + c = 0 = (x-1)(x+1)(x-5)(x+5) = (x^2-1)(x^2-25) = x^4 - 26x^2 + 25$$

Portanto, $b = -26$ e $c = 25$.

(2) As raízes comuns são 1 e -7. Neste caso,

$$x^4 + bx^2 + c = 0 = (x-1)(x+1)(x-7)(x+7) = (x^2-1)(x^2-49) = x^4 - 50x^2 + 49$$

Portanto, $b = -50$ e $c = 49$.

(3) As raízes comuns são 5 e -7. Neste caso,

$$x^4 + bx^2 + c = 0 = (x-5)(x+5)(x-7)(x+7) = (x^2-25)(x^2-49) = x^4 - 74x^2 + 1225$$

Portanto, $b = -74$ e $c = 1225$.

Solucão alternativa – item (c)

(1) As raízes comuns são 1 e 5. Neste caso tem-se que

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 5^4 + 5^2 b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue que $624 + 24b = 0$, logo $b = -26$ e daí $c = 25$.

(2) As raízes comuns são 1 e -7. Neste caso tem-se que

$$\begin{cases} 1 & + & b & + & c & = & 0 \\ 7^4 & + & 7^2 b & + & c & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue que $2400 + 48b = 0$, logo $b = -50$ e daí $c = 49$.

(3) As raízes comuns são 5 e -7. Neste caso tem-se que

$$\begin{cases} 5^4 & + & 5^2 b & + & c & = & 0 \\ 7^4 & + & 7^2 b & + & c & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue que $(2401 - 625) + (49 - 25)b = 0$, logo $b = -74$ e daí $c = 1225$.

Solução Alternativa – item (c)

(1) As raízes comuns são 1 e 5. Neste caso tem-se que 1 e 25 são raízes da equação $y^2 + by + c = 0$, ou seja, $b = -26$ e $c = 25$.

(2) As raízes comuns são 1 e -7. Assim tem-se que 1 e 49 são raízes da equação $y^2 + by + c = 0$, ou seja, $b = -50$ e $c = 49$.

(3) As raízes comuns são 5 e -7. Logo tem-se que 25 e 49 são raízes da equação $y^2 + by + c = 0$, ou seja, $b = -74$ e $c = 1225$.

Pauta de Correção:

(a) Determinar as três raízes. [0,25]

(b) Provar o resultado. [0,25]

(c)
- Escrever as três possibilidades para as raízes da primeira equação. [0,25]
- Determinar os valores de b e c. [0,5]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Consideremos o seguinte sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod m_1 \\ x \equiv a_2 \mod m_2 \\ x \equiv a_3 \mod m_3 \end{cases}$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}, m_i \in \mathbb{N}$ e $(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Tomando-se $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = m_1 \cdot M_1 = m_2 \cdot M_2 = m_3 \cdot M_3$, tem-se que $(M_1, m_1) = (M_2, m_2) = (M_3, m_3) = 1$, logo existe um inteiro b_i tal que $M_i \cdot b_i \equiv 1 \mod m_i$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Com estas notações, prove que o número inteiro $x = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i M_i$ é uma solução para o sistema acima.

(b) Determine a solução geral do seguinte sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 7. \end{cases}$$

Solução

(a) Com as notações dadas tem-se que

$$M_1 = m_2 m_3, M_2 = m_1 m_3, M_3 = m_1 m_2$$

$$M_1 b_1 \equiv 1 \mod m_1, M_2 b_2 \equiv 1 \mod m_2, M_3 b_3 \equiv 1 \mod m_3$$

Assim,

$$x = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i M_i = a_1 b_1 M_1 + a_2 b_2 M_2 + a_3 b_3 M_3 \equiv a_1 b_1 M_1 \equiv a_1 \mod m_1$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i M_i = a_1 b_1 M_1 + a_2 b_2 M_2 + a_3 b_3 M_3 \equiv a_2 b_2 M_2 \equiv a_2 \mod m_2$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i M_i = a_1 b_1 M_1 + a_2 b_2 M_2 + a_3 b_3 M_3 \equiv a_3 b_3 M_3 \equiv a_3 \mod m_3$$

(b) Tem-se que

$$M = 3 \cdot 5 \cdot 7, \ M_1 = 5 \cdot 7, \ M_2 = 3 \cdot 7, \ M_3 = 3 \cdot 5$$

$$\begin{cases} M_1 b_1 = 35 b_1 \equiv 1 \mod 3 \\ M_2 b_2 = 21 b_2 \equiv 1 \mod 5 \\ M_3 b_3 = 15 b_3 \equiv 1 \mod 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b_1 \equiv 1 \mod 3 \\ b_2 \equiv 1 \mod 5 \\ b_3 \equiv 1 \mod 7 \end{cases}$$

Logo, podemos considerar $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 1$ e $x = 2 \cdot 2 \cdot 35 + 3 \cdot 21 + 6 \cdot 15 = 293$ é uma solução particular.

Portanto, a solução geral é dada por $x = 293 + 105t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Provar o resultado. [0,5]

(b)
- Determinar uma solução particular. [0,5]
- Escrever a solução geral. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Sejam x e y números reais.

Prove que $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$ e que a igualdade é verificada se, e somente se, $x = y$.

(b) Sejam a e b reais tais que $a + b = 1$.

Determine os valores de a e b tais que $\sqrt{(a-9)^2+(b-13)^2}$ tem o menor valor possível.

Solução

(a) As seguintes desigualdades são todas equivalentes:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} &\iff \\
\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geqslant |x+y| &\iff \\
2(x^2+y^2) \geqslant |x+y|^2 &\iff \\
2x^2+2y^2 \geqslant x^2+2xy+y^2 &\iff \\
x^2-2xy+y^2 \geqslant 0 &\iff \\
(x-y)^2 \geqslant 0.&
\end{aligned}$$

Como a última é sempre satisfeita, quaisquer que sejam x e y reais, a primeira é verdadeira. Além disso,

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \iff (x-y)^2 = 0 \iff x = y.$$

(b) Sejam a, b tais que $a + b = 1$. Pelo item anterior, com $x = a - 9$ e $y = b - 13$,

$$\sqrt{(a-9)^2+(b-13)^2} \geqslant \frac{|(a-9)+(b-13)|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-22|}{\sqrt{2}} = \frac{21}{\sqrt{2}}$$

Ainda pelo item anterior, sabemos que há igualdade se, e somente se, $a - 9 = b - 13$, ou seja, $a - b = -4$. Daí,

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-4 \end{cases} \implies a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{5}{2}.$$

Assim, para estes valores de a e b, a expressão atinge seu valor mínimo.

Pauta de Correção:

(a)
- Provar a desigualdade. [0,25]
- Provar a igualdade. [0,25]

(b)
- Mostrar que possui mínimo ou calcular o valor mínimo. [0,5]
- Determinar os valores de a e b. [0,25]

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Nos dois casos abaixo, demonstre a conhecida relação métrica $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, também chamada de “potência de ponto no círculo”:

(a) P exterior ao círculo (Figura 1).

(b) P interior ao círculo (Figura 2).

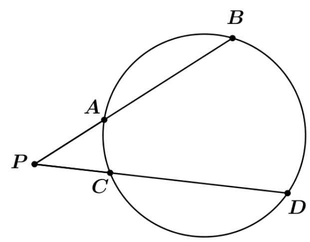


Figura 1

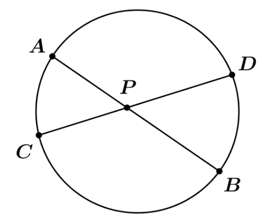
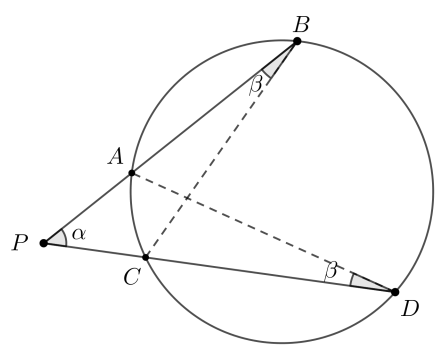


Figura 2

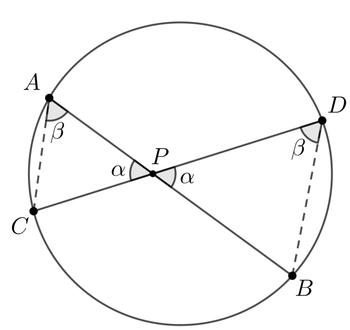
Solução

(a) Traçando os segmentos AD e BC, conforme a figura abaixo, obtemos os triângulos APD e CPB, os quais são semelhantes pelo caso de semelhança AA (ângulo-ângulo), já que o ângulo de medida α é comum e os ângulos de medida β são congruentes, já que ambos são ângulos inscritos na circunferência e subtendem o mesmo arco AC.



Logo, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ e assim $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, como queríamos demonstrar.

(b) Traçando os segmentos AC e BD, conforme a figura abaixo, obtemos os triângulos APC e DPB, os quais são semelhantes pelo caso de semelhança AA (ângulo-ângulo), já que os ângulos de medida α são congruentes, já que são opostos pelo vértice, e os ângulos de medida β são congruentes, já que ambos são ângulos inscritos na circunferência e subtendem o mesmo arco BC.



Logo,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

e, portanto,

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD},$$

como queríamos demonstrar.

Pauta de Correção:

(a)
- Provar que os triângulos APD e CPB são semelhantes pelo caso AA. [0,5]
- Utilizar a semelhança para provar a relação métrica. [0,25]

(b)
- Provar que os triângulos APC e DPB são semelhantes pelo caso AA. [0,25]
- Utilizar a semelhança para provar a relação métrica. [0,25]

Questão 05 [1,25]

Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente, se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$, então $a = A$ e $b = B$ (a e A são números reais positivos diferentes de 1, b e B são números reais não nulos).

Solução

Do fato de que $f(x_1) = F(x_1)$ decorre que $b \cdot a^{x_1} = B \cdot A^{x_1}$. Como a não é nulo, nenhuma potência de a será nula também. Assim, podemos dividir por a^{x_1} a última equação, obtendo

$$b = B \cdot \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}}.$$

Por outro lado, $f(x_2) = F(x_2)$ implica que $b \cdot a^{x_2} = B \cdot A^{x_2}$.

Substituindo, nesta última equação, o valor encontrado para b, temos

$$B \cdot \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}} \cdot a^{x_2} = B \cdot A^{x_2}.$$

Dividindo a equação anterior por $B \cdot a^{x_2}$ (que não é nulo, já que B e a não são nulos) obtemos

$$\frac{A^{x_1}}{a^{x_1}} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}}$$

$$\left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2}.$$

Como $x_1 \neq x_2$ e $\frac{A}{a} > 0$ (pois ambos, a e A, são maiores que zero), então a última igualdade implica em $\frac{A}{a} = 1$, ou seja, $A = a$.

Substituindo A por a em $b \cdot a^{x_1} = B \cdot A^{x_1}$ ficamos com

$$b \cdot a^{x_1} = B \cdot a^{x_1}.$$

Dividindo esta última equação pelo número real não nulo a^{x_1} chegamos ao resultado $b = B$, concluindo assim a prova.

Pauta de Correção:

- Deduzir a equação $\left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2}$. [0,5]
- Argumentar que $\frac{A}{a} = 1$ considerando que $x_1 \neq x_2$ e $\frac{A}{a} > 0$. [0,5]
- Concluir que $A = a$ e, a partir daí, que $B = b$. [0,25]

Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Consideremos o número de Fermat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, onde n é um número natural.

(a) Mostre que se $m < n$, então F_m divide $F_n - 2$.

(b) Mostre que se $m \neq n$, então F_m e F_n são primos entre si.

Solução

(a) Suponha $m < n$. Considere $r = n - m > 0$, logo $n = m + r$.

Segue que $F_n = 2^{(2^n)} + 1 = 2^{(2^{r+m})} + 1 = 2^{(2^r 2^m)} + 1 = (2^{2^m})^{2^r} + 1$ e daí

$$F_n - 2 = (2^{2^m})^{2^r} - 1$$

onde 2^r é um número par.

Portanto, $F_m = 2^{(2^m)} + 1$ divide $(2^{(2^m)})^{2^r} - 1 = F_n - 2$.

(b) Suponha $m \neq n$ e, sem perda de generalidade, $m < n$.

Tem-se que $(F_m, F_n) = (F_m, F_n - 2 + 2)$. Como F_m divide $F_n - 2$, segue que $F_n - 2 = kF_m$, com k inteiro.

Portanto, $(F_m, F_n) = (F_m, F_n - 2 + 2) = (F_m, kF_m + 2) = (F_m, 2) = (2^{(2^m)} + 1, 2) = 1$.

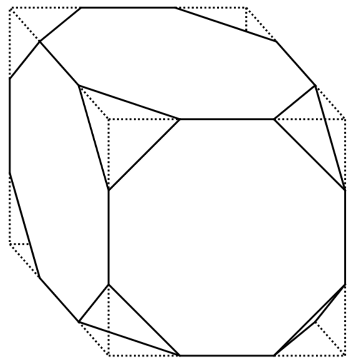
Pauta de Correção:

(a)
- Escrever $F_n = (2^{2^m})^{2^r} + 1$. [0,25]
- Escrever que $F_n - 2 = (2^{2^m})^{2^r} - 1$ e concluir que F_m divide $F_n - 2$. [0,5]

(b)
- Escrever $(F_m, F_n) = (F_m, F_n - 2 + 2) = (F_m, kF_m + 2)$.[0,25]
- Concluir que $(F_m, F_n) = (F_m, 2) = (2^{(2^m)} + 1, 2) = 1$. [0,25]

Questão 07 [1,25]

Um sólido é produzido a partir de um cubo de madeira com 2cm de aresta, retirando-se um tetraedro a partir de cada vértice do cubo, como mostrado na figura abaixo. Seis faces do sólido resultante são octógonos regulares, e as outras oito faces são triângulos equiláteros.

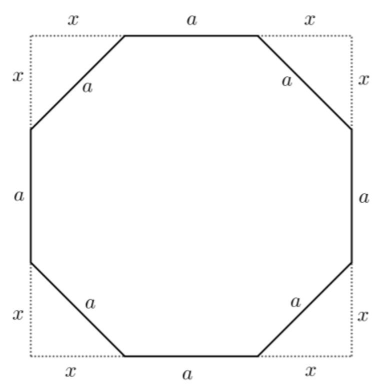


Calcule o volume do sólido.

Solução

Na figura abaixo temos a vista frontal do sólido. Nela, as partes pontilhadas correspondem aos cantos que foram retirados.

Chamando de a a medida dos lados do octógono regular e de x a medida das arestas laterais dos tetraedros que foram retirados, concluímos que $a + 2x = 2$, já que a aresta do cubo mede 2 cm.



Considerando os triângulos retângulos isósceles de hipotenusa a e catetos x que aparecem na figura, concluímos, a partir do teorema de Pitágoras, que $a^2 = 2x^2$, logo $a = x\sqrt{2}$.

Como $a + 2x = 2$, temos então $x\sqrt{2} + 2x = 2$, logo $x(2 + \sqrt{2}) = 2$ e então

$$x = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Da forma como foram obtidos, os tetraedros têm como faces três triângulos retângulos isósceles de catetos medindo x e hipotenusa medindo a e um triângulo equilátero de medida a. Se considerarmos um dos triângulos retângulos isósceles como base, a área da base do tetraedro será dada por $\frac{x^2}{2}$ e a altura por x. Portanto, o volume deste tetraedro é $\frac{x^3}{6}$.

Com isso, o volume do sólido, após a retirada dos 8 tetraedros será

$$\begin{aligned}
V &= 2^3 - 8 \cdot \frac{x^3}{6} \\
&= 8 - \frac{4 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^3}{3} \\
&= 8 - \frac{4 \cdot \left(2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3\right)}{3} \\
&= 8 - \frac{4 \cdot \left(8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2}\right)}{3} \\
&= 8 - \frac{4 \cdot \left(20 - 14\sqrt{2}\right)}{3} \\
&= 8 - \frac{80 - 56\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{24 - \left(80 - 56\sqrt{2}\right)}{3} \\
&= \frac{56\sqrt{2} - 56}{3}.
\end{aligned}$$

Pauta de Correção:

- Encontrar a relação entre x e o lado a do octógono dada pelo Teorema de Pitágoras. [0,5]
- Encontrar o valor de x. [0,25]
- Apresentar uma expressão correta para o volume de cada tetraedro ($x^3/6$) ou, alternativamente, calcular corretamente esse volume. [0,25]
- Encontrar o volume do sólido. [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Um prêmio é oferecido a um jogador pelo lançamento de um dado não viciado, com as seguintes regras:

- Se o resultado for 1, o jogador ganha 1 ponto.
- Se o resultado for 2 ou 3, o jogador ganha 2 pontos.
- Se o resultado for 4, 5 ou 6, não obtém pontuação.
- Os pontos vão se somando a cada jogada.
- O prêmio é entregue assim que o jogador conseguir obter exatamente 3 pontos e o jogo é encerrado.

(a) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio na segunda jogada.

(b) Determine a probabilidade de se ganhar o prêmio apenas na terceira jogada.

Solução

(a) Há duas maneiras de obter 3 pontos na segunda jogada:

- fazer 1 ponto na primeira e 2 pontos na segunda jogada cuja probabilidade é $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
- fazer 2 pontos na primeira e 1 ponto na segunda jogada cuja probabilidade é $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Logo a probabilidade de se ganhar o prêmio na segunda jogada é igual a $\frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

(b) Para facilitar a escrita considere a terna (a, b, c), onde a indica a pontuação na primeira jogada, b na segunda e c na terceira.

Há cinco maneiras de obter 3 pontos exatamente na terceira jogada:

- $(0, 1, 2)$ cuja probabilidade é $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{216}$.
- $(0, 2, 1)$ cuja probabilidade é $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{216}$.
- $(1, 0, 2)$ cuja probabilidade é $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{216}$.
- $(2, 0, 1)$ cuja probabilidade é $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{216}$.
- $(1, 1, 1)$ cuja probabilidade é $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Portanto a probabilidade de se ganhar o prêmio exatamente na terceira jogada é igual a $4 \cdot \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{25}{216}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Determinar as duas probabilidades para se obter 3 pontos. [0,25]
- Calcular a probabilidade para se obter 3 pontos na segunda jogada. [0,25]

(b)
- Determinar as cinco possibilidades para se obter 3 pontos exatamente na terceira jogada. [0,50]
- Calcular a probabilidade para se obter 3 pontos exatamente na terceira jogada. [0,25]