MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2023.1 – Gabarito

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c) 0,50]

Dado um número inteiro positivo n, considere a soma $S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$.

(a) Encontre a soma S_n em função de n.

(b) Mostre que se n é ímpar, então $S_n \equiv 0 \pmod{n}$.

(c) Prove que se n é par, então $S_n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Solução

(a) Escrevendo $S_n = (n-1) + \cdots + 2 + 1$, obtemos $2S_n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n-1 \text{ vezes}} = (n-1)n$.

Portanto $S_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

(b) Se n é ímpar, então $n = 2k+1$, com k inteiro.

Logo $\dfrac{n-1}{2} = k \in \mathbb{Z}$. Portanto $S_n = kn \equiv 0 \pmod{n}$.

(c) Se n é par, então $n = 2k$, com k inteiro.

Logo $\dfrac{n}{2} = k \in \mathbb{Z}$, com $0 < k < n$ e assim $S_n = k(n-1) \equiv -k \equiv n - k \bmod n$, com $0 < n - k < n$.

Portanto, $S_n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Solução alternativa item (c)

Supõe que n é par. Neste caso, escrevendo $S_n = n \cdot \left(\dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$, concluímos que $\left(\dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ não é inteiro, pois $\dfrac{n}{2}$ é um inteiro.

Portanto S_n não é múltiplo de n, portanto $S_n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Pauta de Correção:

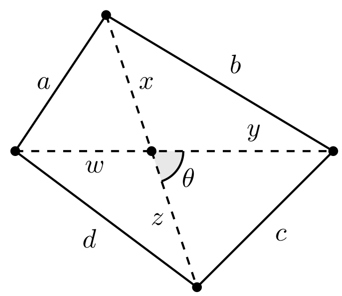
(a) Fazer o item. [0,25]

(b) Prova o resultado. [0,50]

(c) Provar o resultado. [0,50]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c) 0,25]

Considere o quadrilátero convexo abaixo, representado com suas diagonais. As letras correspondem às medidas dos segmentos e $0 < \theta \leqslant 90^\circ$ representa um dos ângulos entre as diagonais.



(a) Se $\theta = 90^\circ$, prove que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(b) Se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, prove que $(xw + yz)\cos(\theta) = -(xy + zw)\cos(\theta)$.

(c) Se $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, prove que $\theta = 90^\circ$.

Solução

(a) Para $\theta = 90^\circ$, usando o teorema de Pitágoras nos quatro triângulos retângulos :

$$\begin{cases} a^2 &= x^2 + w^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2 \\ c^2 &= y^2 + z^2 \\ w^2 + z^2 &= d^2 \end{cases}$$

Somando as igualdades, encontramos $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(b) Utilizando a lei dos cossenos :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 &= x^2 + w^2 + z^2 + y^2 - 2(xw + yz)\cos(\theta) \\ b^2 + d^2 &= x^2 + y^2 + w^2 + z^2 - 2(xy + zw)\cos(180^\circ - \theta) \end{cases}$$

Usando o fato de que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ e que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$, teremos

$$-2(xw + yz)\cos(\theta) = +2(xy + zw)\cos(\theta).$$

(c) Da conclusão do item anterior, encontramos $(xw + yz + xy + zw)\cos(\theta) = 0$.

Nessa igualdade, quem deve ser nulo é o $\cos\theta$, ou seja, $\theta = 90^\circ$.

Pauta de Correção:

(a)
- Determinar $a^2 + c^2$ e $b^2 + d^2$. [0,25]
- Concluir a igualdade pedida . [0,25]

(b) Concluir a igualdade $(xw + yz)\cos(\theta) = -(xy + zw)\cos(\theta)$. [0,50]

(c) Concluir que $\theta = 90^\circ$. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos. Definimos as médias aritmética (A_n) e harmônica (H_n) destes números como

$$A_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{e} \quad H_n = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1}$$

(a) Prove que $A_2 \geqslant H_2$, explicitando o caso em que ocorre a igualdade.

(b) Utilize, sem provar, a desigualdade $A_3 \geqslant H_3$ para demonstrar que se a, b e c são números reais positivos tais que $a + b + c = 1$, então $ab + bc + ac \geqslant 9abc$.

Solução

(a) Considerando $x_1 = a$ e $x_2 = b$ temos que

$$A_2 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad H_2 = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \right)^{-1}.$$

Como $a, b > 0$ valem as seguintes equivalências

$$A_2 \geqslant H_2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

A última desigualdade vale para quaisquer a, b, assim segue que $A_2 \geqslant H_2$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$.

(b) Considerando $x_1 = a$, $x_2 = b$ e $x_3 = c$ temos que

$$A_3 = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{e} \quad H_3 = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \right)^{-1}.$$

Como $a, b, c > 0$ valem as seguintes equivalências

$$A_3 \geqslant H_3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3abc}{bc + ac + ab} \Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab) \geqslant 9abc.$$

Portanto, se $a + b + c = 1$ então $ab + bc + ac \geqslant 9abc$.

Pauta de Correção:

(a)
- Provar a desigualdade. [0,25]
- Provar que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$. [0,25]

(b)
- Apresentar as expressões de A_3 e H_3. [0,25]
- Provar a desigualdade. [0,50]

Questão 04 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n com coeficientes reais e que tenha n raízes reais. Mostre que o produto destas raízes (contadas com suas multiplicidades) é igual a $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

(b) Sejam a, b e c números reais, dois a dois distintos e todos diferentes de zero. Suponha que todas as raízes dos 6 polinômios obtidos pelas permutações dos coeficientes do polinômio $ax^2 + bx + c$ são reais. Calcule o produto de todas as raízes desses 6 polinômios, contadas com suas multiplicidades.

Solução

(a) Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes reais de $p(x)$, contadas com suas multiplicidades. Portanto,

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

Multiplicando a expressão acima, obtemos que o termo independente de x é igual a $(-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_n$.

Logo $(-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_n = a_0$, concluímos que $r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

(b) Para o polinômio $ax^2 + bx + c$, listamos nas tabelas abaixo as 6 permutações dos coeficientes e os respectivos produtos de raízes (calculados usando o resultado do item (a) para $n = 2$):

Polinômio	Produto das raízes
$ax^2 + bx + c$	$\dfrac{c}{a}$
$ax^2 + cx + b$	$\dfrac{b}{a}$
$bx^2 + ax + c$	$\dfrac{c}{b}$

Polinômio	Produto das raízes
$bx^2 + cx + a$	$\dfrac{a}{b}$
$cx^2 + ax + b$	$\dfrac{b}{c}$
$cx^2 + bx + a$	$\dfrac{a}{c}$

O produto das raízes de todos os polinômios encontrados é:

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

Pauta de Correção:

(a) Provar o resultado. [0,50]

(b)
- Calcular os produtos separadamente. [0,50]
- Concluir que o produto é 1. [0,25]

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c) 0,50]

Escreveremos números, no sistema decimal, utilizando apenas os algarismos 3, 4 e 6.

(a) Quantos números com até n algarismos podemos obter?

(b) Seja a_n a quantidade de números com exatamente n algarismos, nos quais o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes.

Deduza que $a_1 = 1$ e que a_n satisfaz a recorrência $a_{n+1} = a_n + 3^n$, para $n \geqslant 1$.

(c) Resolva a equação de recorrência do item (b).

Solução

Escreveremos números, no sistema decimal, utilizando apenas os algarismos 3, 4 e 6.

(a) Indicando por b_n a quantidade desses números com n algarismos temos que $b_1 = 3, b_2 = 3^2, b_3 = 3^3, \cdots, b_n = 3^n$.

Assim a quantidade de números com até n algarismos é dada por $S_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$.

Logo $3S_n = 3^2 + \cdots + 3^n + 3^{n+1}$ e obtemos $2S_n = 3S_n - S_n = 3^{n+1} - 3$.

Portanto, $S_n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$.

(b) Seja a_n a quantidade de números com n algarismos onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes.
Observe que $a_1 = 1$ pois, neste caso, temos somente o número 6.
Considerando os números com $n+1$ algarismos, com $n \geqslant 1$, onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes, temos 3 possibilidades para o algarismo das unidades: 3, 4 ou 6.

- Os que terminam em 3 correspondem aos números com n algarismos onde o algarismo 6 aparece uma quantidade ímpar de vezes, portanto temos um total igual a a_n desse tipo.
- Do mesmo modo, temos um total igual a a_n dos números que terminam em 4.
- Os que terminam em 6 correspondem aos números com n algarismos onde o 6 aparece uma quantidade par de vezes, portanto, temos um total de $3^n - a_n$.

Concluímos que $a_{n+1} = a_n + a_n + 3^n - a_n = a_n + 3^n$.

(c) Temos que $a_2 = a_1 + 3, a_3 = a_2 + 3^2, \cdots, a_{n+1} = a_n + 3^n$. Somando, termo a termo, obtemos

$$a_{n+1} = a_1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1 + \frac{3^{n+1} - 3}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}, \text{ onde } n \geqslant 1.$$

Portanto, $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$, onde $n \geqslant 1$.

Pauta de Correção:

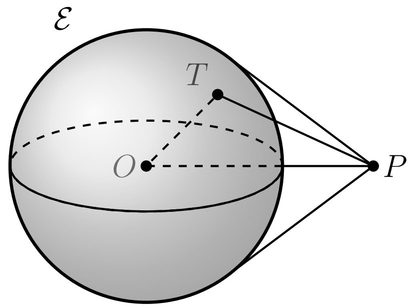
(a) Resolver o item. [0,25]

(b) Deduzir a equação. [0,50]

(c) Resolver a equação. [0,50]

Questão 06 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Sejam dados, no espaço, uma esfera $\mathcal{E}(O;r)$ de centro no ponto O e raio r, e um ponto P, com $\overline{PO} = d > r$.

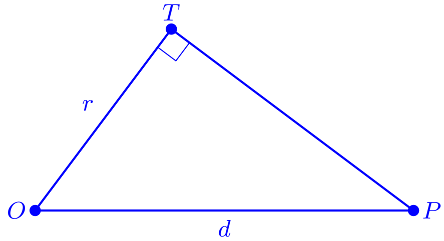


(a) Para $T \in \mathcal{E}$, mostre que a reta $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a $\mathcal{E}$ se, e somente se, $\overline{PT} = \sqrt{d^2 - r^2}$.

(b) Mostre que o lugar geométrico dos pontos $T \in \mathcal{E}$ tais que $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a $\mathcal{E}$ **está contido** em um círculo, determinando seu centro, raio e o plano em que está contido.

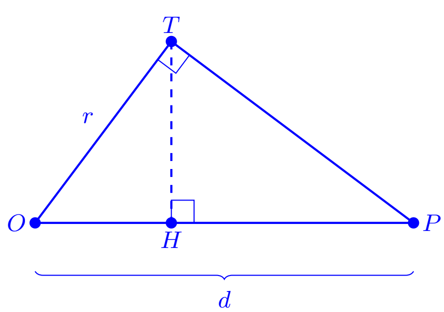
Solução

(a) Como OT é raio da esfera, temos que



$\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a $\mathcal{E}$ $\iff$ PT e OT são perpendiculares $\iff$ OPT é triângulo retângulo em T $\iff$ $\overline{PT}^2 + r^2 = d^2$ $\iff$ $\overline{PT} = \sqrt{d^2 - r^2}$

(b) Seja H o pé da altura relativa ao lado OP no triângulo OPT.



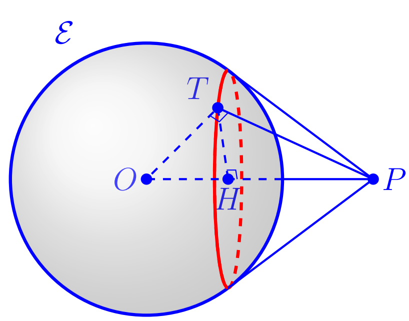
OH é projeção do cateto OT sobre a hipotenusa OP. Portanto, podemos calcular sua medida:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OH} \iff \overline{OH} = \frac{r^2}{d}.$$

Ou seja, a posição do ponto H não depende do ponto T. Também, a medida de HT pode ser calculada:

$$\overline{OP} \cdot \overline{HT} = \overline{OT} \cdot \overline{PT} \iff \overline{HT} = \frac{r\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$$

Como TH é perpendicular a OP, podemos afirmar que T pertence ao plano perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$ e que contém o ponto H.



Concluímos, então, que o lugar geométrico procurado está contido no círculo de centro H e raio $\dfrac{r\sqrt{d^2 - r^2}}{d}$ contido no plano perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$.

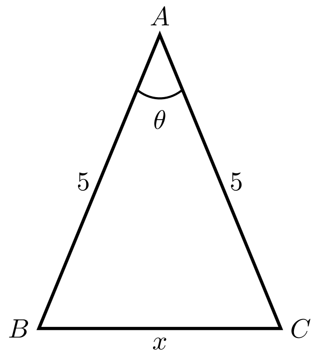
Pauta de Correção:

(a)
- Provar que $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a $\mathcal{E} \iff PT$ e OT são perpendiculares. [0,25]
- Concluir que é necessário e suficiente que $\overline{PT} = \sqrt{d^2 - r^2}$. [0,25]

(b)
- Determinar o centro em função de d e r. [0,25]
- Determinar o raio em função de d e r. [0,25]
- Determinar o plano. [0,25]

Questão 07 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere um triângulo isósceles ABC, representado pela figura abaixo, cujos lados congruentes AB e AC medem 5. Assuma que o terceiro lado e o ângulo oposto a este lado sejam variáveis, medindo $\overline{BC} = x$ e $\hat{A} = \theta$, respectivamente.

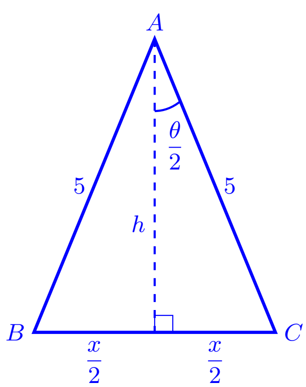


(a) Encontre a função que expressa a área do triângulo ABC em relação ao ângulo θ, indicando o domínio e a expressão da função.

(b) Calcule a área máxima do triângulo. Quais as medidas de x e θ neste caso?

Solução

(a) Em um triângulo isósceles sabemos que a altura em relação à base (lado eventualmente não congruente) coincide com a mediana e com a bissetriz relativas a esse lado. Daí, traçando a altura em relação ao lado BC e chamando-a de h podemos expressar x e h em função de θ:



$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{5} \iff x = 10\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{5} \iff h = 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Assim, a área do triângulo pode ser expressa, em função de θ por:

$$\mathcal{S}(\theta) = \frac{10\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 5\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = 25\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

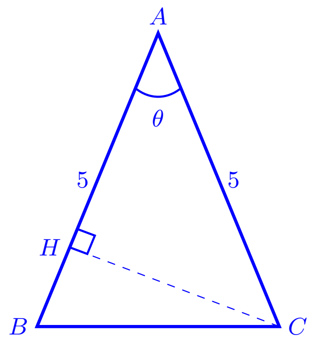
Como, para qualquer número real t, tem-se $\text{sen}(2t) = 2\text{sen}(t)\cos(t)$, podemos reescrever a expressão da área como

$$\mathcal{S}(\theta) = \frac{25}{2}\text{sen}(\theta).$$

Para que exista triângulo, devemos impor que $0 < \theta < \pi$. Assim, o domínio da função é o intervalo aberto $]0\,,\,\pi[$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} :]0\,,\,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \mathcal{S}(\theta) = \frac{25}{2}\text{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Solução Alternativa para o item (a)



Traçando a altura CH relativa ao lado AB e olhando para o triângulo retângulo AHC, temos que,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \qquad \therefore \qquad \overline{CH} = 5\,\text{sen}(\theta)$$

Daí, a área do triângulo pode ser calculada como

$$\mathcal{S}(\theta) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{5 \cdot 5\,\text{sen}(\theta)}{2} = \frac{25}{2}\text{sen}(\theta).$$

Para que exista triângulo, devemos impor que $0 < \theta < \pi$. Assim, o domínio da função é o intervalo aberto $]0\,,\,\pi[$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} :]0\,,\,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \mathcal{S}(\theta) = \frac{25}{2}\text{sen}(\theta). \end{aligned}$$

(b) Para $0 < \theta < \pi$, temos que $0 < \text{sen}(\theta) \leqslant 1$, com o valor máximo atingido quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Daí, temos para todo $0 < \theta < \pi$

$$0 < \mathcal{S}(\theta) \leqslant \frac{25}{2}, \text{ com } \quad \mathcal{S}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

A área máxima é $\dfrac{25}{2}$ atingida quando o triângulo é retângulo isósceles, isto é, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Como os catetos medem 5, podemos calcular a hipotenusa BC:

$$x^2 = 5^2 + 5^2 \qquad \therefore \qquad x = 5\sqrt{2}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Encontrar a expressão da área. [0,25]
- Determinar o domínio da função. [0,25]

(b)
- Determinar a área máxima. [0,25]
- Determinar o valor de θ. [0,25]
- Determinar o valor de x. [0,25]

Questão 08 [1,25]

Se b é um número inteiro positivo tal que $mdc(b, 17) = 1$, prove que 17 divide pelo menos um dos números abaixo: $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$, $b^8 + 1$.

Solução

Como 17 é primo e $mdc(b, 17) = 1$, usando o pequeno Teorema de Fermat, temos que

$$b^{16} \equiv 1 \bmod 17$$

Portanto, $17 \mid b^{16} - 1$. Agora, observando que

$$b^{16} - 1 = (b^8 - 1)(b^8 + 1) = (b^4 - 1)(b^4 + 1)(b^8 + 1) = (b^2 - 1)(b^2 + 1)(b^4 + 1)(b^8 + 1)$$

concluimos que 17 divide pelo menos um dos fatores $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$, $b^8 + 1$.

Pauta de Correção:

- Usar o pequeno Teorema de Fermat. [0,50]
- Concluir que 17 divide $b^{16} - 1$. [0,25]
- Fatorar $b^{16} - 1$. [0,25]
- Concluir que 17 divide pelo menos um dos fatores. [0,25]

Solução Alternativa

Como $\text{mdc}(b, 17) = 1$, temos que $b \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \text{ ou } \pm 8 \bmod 17$.

Analisando todas as alternativas:

(1) Suponha $b \equiv \pm 1 \bmod 17$. Nestes dois casos, $b^2 \equiv 1 \bmod 17, b^2 - 1 \equiv 0 \bmod 17$.

(2) Suponha $b \equiv \pm 4 \bmod 17$. Nestes dois casos, $b^2 \equiv -1 \bmod 17, b^2 + 1 \equiv 0 \bmod 17$.

(3) Suponha $b \equiv \pm 2 \text{ ou } \pm 8 \bmod 17$. Nestes quatro casos, $b^4 \equiv -1 \bmod 17, b^4 + 1 \equiv 0 \bmod 17$.

(4) Suponha $b \equiv \pm 3, \pm 5, \pm 6, \text{ ou } \pm 7$. Nestes oito casos, $b^8 \equiv -1 \bmod 17, b^8 + 1 \equiv 0 \bmod 17$.

Concluímos que 17 divide pelo menos um dos números $b^2 - 1$, $b^2 + 1$, $b^4 + 1$ ou $b^8 + 1$.

Pauta de Correção da Solução Alternativa

- Item (1). [0,25]
- Item (2). [0,25]
- Item (3). [0,25]
- Item (4). [0,50]