MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ENQ – 2023.2 – Gabarito

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]**

Seja b um número real positivo e diferente de 1.

(a) Use que $b^{u+v} = b^u \cdot b^v$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, para demonstrar a identidade

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y, \text{ para } x, y \text{ números reais positivos.}$$

(b) Utilizando a identidade do item (a) e sem supor válida qualquer outra propriedade do logaritmo, prove que

$$\log_b \left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \log_b x, \text{ para } x \text{ real positivo.}$$

Solução

(a) Sejam $u = \log_b x$ e $v = \log_b y$. Pela definição de logaritmo, temos que $x = b^u$ e $y = b^v$. Daí,

$$xy = b^u \cdot b^v = b^{u+v}.$$

E, portanto, novamente pela definição de logaritmo podemos afirmar que $u + v = \log_b (xy)$. Ou seja, que

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (xy).$$

(b) Lembre que para x real positivo, $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$. Logo,

$$\log_b x = \log_b \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = \log_b \sqrt{x} + \log_b \sqrt{x} = 2 \log_b \sqrt{x}.$$

Assim,

$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

Pauta de Correção:

(a)
- Usar corretamente a definição usual de logaritmo. [0,25]
- Concluir a demonstração. [0,50]

(b)
- Escrever $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ ou equivalente. [0,25]
- Concluir a demonstração. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Sejam a, b e c dígitos no sistema decimal, isto é, números inteiros que podem assumir valores de 0 a 9.

(a) Mostre que a fração geratriz da dízima periódica simples $0, abc\,abc\,abc\ldots$ é $\dfrac{abc}{999}$.

(b) Encontre a fração geratriz da dízima periódica composta $2,0358358358\ldots$.

Solução

(a) Temos que

$$0, abc\,abc\,abc\ldots = \frac{abc}{1000} + \frac{abc}{1000^2} + \frac{abc}{1000^3} + \cdots = \frac{abc}{1000}\left[1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right] = \frac{abc}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{abc}{999}.$$

No cálculo acima (soma entre colchetes) usamos a soma da progressão geométrica infinita com primeiro termo 1 e razão $\dfrac{1}{1000}$ que é dada por $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1000}} = \dfrac{1000}{999}$.

(b) Se $x = 2,0358358358\ldots$, então

$$10x = 20,358358358\ldots = 20 + 0,358\,358\,358\ldots = 20 + \frac{358}{999} = \frac{20 \cdot 999 + 358}{999} = \frac{19980 + 358}{999} = \frac{20338}{999}.$$

Portanto $x = \dfrac{20338}{9990}$.

Solução Alternativa para o item (a)

Se $\alpha = 0, abc\,abc\,abc\ldots$, então $1000\,\alpha = abc, abc\,abc\,abc\ldots = abc + 0, abc\,abc\,abc\ldots = abc + \alpha$.

Logo $1000\,\alpha - \alpha = abc$ e assim $999\,\alpha = abc$.

Portanto $\alpha = \dfrac{abc}{999}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever corretamente a PG infinita. [0,25]
- Concluir corretamente a geratriz. [0,25]

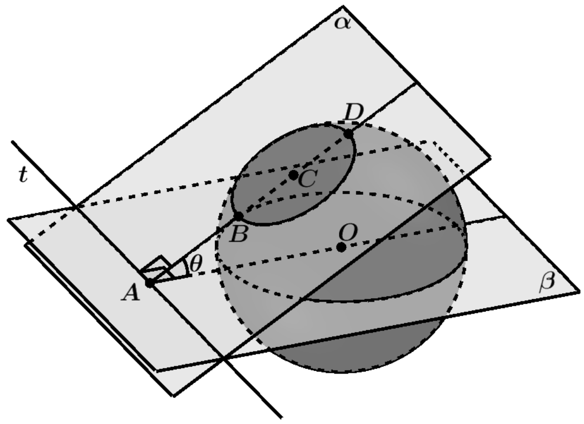
(b)
- Multiplicar por 100 a dízima ou equivalente. [0,25]
- Utilizar o item (a) ou equivalente e, calcular corretamente a geratriz. [0,5]

Questão 03 [**1,25**]

Na figura, o plano β contém o centro O da esfera de raio 3, e faz ângulo θ com o plano α.

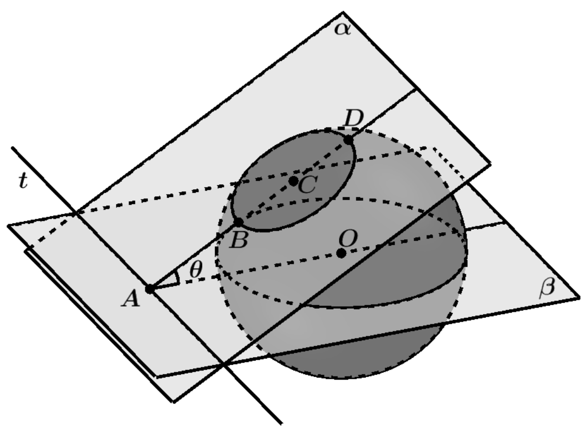
A reta t é a interseção de α e β e sua distância a O é 5.

Determine a área do círculo de centro C dado pela interseção de α com a esfera, sabendo que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{5}$.



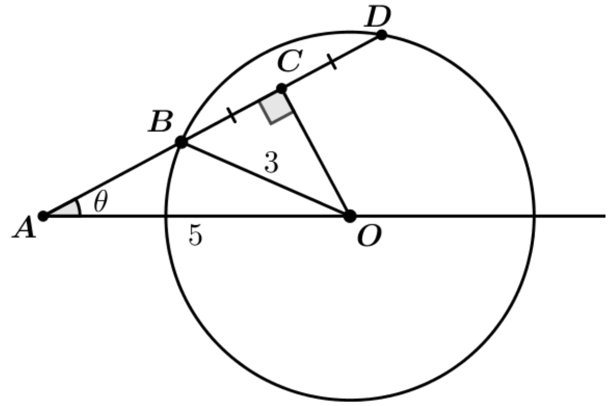
Solução:

Considere os pontos A, B e D destacados na figura abaixo:



Observe que BC é um raio do círculo cuja área queremos calcular.

O plano que contém os pontos A, B, O e C, intersecta a esfera em um círculo de centro O e raio 3, como na figura abaixo.



O segmento OC intersecta a corda BD do círculo em seu ponto médio C, logo o ângulo $A\hat{C}O$ é reto.
Com isso, temos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{5},$$

logo

$$\overline{OC} = 5\operatorname{sen}\theta = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2.$$

Aplicando agora o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BCO, temos

$$\overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 \therefore 2^2 + \overline{BC}^2 = 3^2,$$

pois OB é um raio da esfera.
Assim segue que

$$\overline{BC}^2 = 9 - 4 = 5.$$

Como BC é um raio do círculo cuja área queremos calcular, esta área é

$$\pi\,\overline{BC}^2 = \pi \cdot 5 = 5\pi.$$

Pauta de Correção:

- Considerar ou fazer um esboço onde apareça os triângulos ACO e BCO (A e B podem ter outros nomes) [0,25]
- Concluir que o ângulo $A\hat{C}O$ é reto. [0,25]
- Obter $\overline{OC}^2 = 5\operatorname{sen}\theta = 2$. [0,25]
- Obter $\overline{BC}^2 = 5$. [0,25]
- Concluir que área é igual a 5π. [0,25]

Questão 04 [1,25]

Considere as progressões aritméticas (a_n) de termo inicial 7 e razão 12 e (b_m) de termo inicial 9 e razão 35. Determine todos os termos, menores do que 1000, que aparecem em ambas as sequências.

Solução

Temos que , $a_n = 7 + 12 \cdot (n-1)$ e $b_m = 9 + 35 \cdot (m-1)$, assim $a_n \equiv 7 \mod 12$ e $b_m \equiv 9 \mod 35$.

Os termos que aparecem nas duas progressões são soluções do seguinte sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv & 7 \mod 12 \\ x \equiv & 9 \mod 35 \end{cases}$$

Na primeira equação temos que $x = 12y + 7$ com y inteiro.

Substituindo na segunda equação temos que $12y + 7 \equiv 9 \mod 35$, ou seja, $12y \equiv 2 \mod 35$.

Multiplicando esta equação por 3 e como $36 \equiv 1 \mod 35$ temos que $y \equiv 6 \mod 35$.

Logo $y = 35t + 6$ e assim $x = 12y + 7 = 12(35t + 6) + 7 = 420t + 79$.

Os termos, menores do que 1000, que aparecem nas duas sequências são dados por

$x = 79 + 420t$, onde $t \geqslant 0$ e $x = 79 + 420t \leqslant 1000$, logo $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Portanto, $x = 79$, $x = 499$ ou $x = 919$.

Solução Alternativa

Como $\text{mdc}(12, 35) = 1$ podemos usar o Teorema Chinês dos Restos para resolver o sistema

$$\begin{cases} x \equiv & 7 & \mod 12 \\ x \equiv & 9 & \mod 35 \end{cases}$$

Neste caso, $c_1 = 7, c_2 = 9, M = 12 \cdot 35 = 420, M_1 = 35$ e $M_2 = 12$.

Por inspeção vemos que, $y_1 = -1$ e $y_2 = 3$ são soluções das congruências $35y_1 \equiv 1 \mod 12$, e $12y_2 \equiv 1 \mod 35$.

Logo as soluções do sistema são dadas por

$$x \equiv M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 \equiv 35 \cdot (-1) \cdot 7 + 12 \cdot 3 \cdot 9 \equiv 79 \text{ mod } 420$$

A solução geral do sistema é dada por $x = 79 + 420t$, onde $t \in \mathbb{Z}$.

Portanto, os termos, menores do que 1000, que aparecem nas três sequências são $x = 79, 499$ e 919.

Solução Alternativa 2

Os termos que aparecem em ambas as progressões aritméticas são da forma $7 + 12x = 9 + 35y \geqslant 0$, com x e y inteiros não negativos.

Segue-se que $12x - 35y = 2$.Uma solução particular dessa equação é $x = 6$ e $y = 2$.

Como mdc $(12, 35) = 1$, a solução geral dessa equação é dada por $x = 6 + 35t, y = 2 + 12t$, com t inteiro.

Os termos comuns das progressões aritméticas são $7 + 12x = 7 + 12(6 + 35t) = 79 + 420t \leqslant 1000$.

Portanto $t \in \{0, 1, 2\}$ e $x \in \{79, 499, 919\}$.

Pauta de Correção:

- Montar o sistema . [0,25]

- Achar uma solução.[0,50]
- Escrever a solução geral.[0,25]
- Determinar os termos comuns, menores do que 1000. [0,25]

Pauta de Correção da Solução Alternativa 2:

- Escrever a equação diofantina $12x - 35y = 2$. [0,50]
- Achar uma solução particular. [0,25]
- Escrever a solução geral. [0,25]
- Determinar os termos comuns menores do que 1000. [0,25]

Questão 05 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

(a) Mostre que o quadrado de qualquer número inteiro deixa resto 0 ou 1, quando dividido por 4.$[0,5]$

(b) Mostre que não existem inteiros x, y e z tais que $x^2 + y^2 - 8z = 103$.$[0,75]$

Solução

(a) Qualquer inteiro n é da forma $2k$ ou $2k + 1$ com k inteiro. Temos então que n^2 é da forma $4k^2$ ou $4k^2 + 4k + 1$, donde na divisão por 4 deixa resto 0 ou 1.

(b) Observe que em $x^2 + y^2 = 8z + 103$, $8z + 103$ é da forma $4k + 3$ e portanto deixa resto 3 na divisão por 4. Do item(a) temos que $x^2 + y^2$ deixa resto 0, 1 ou 2 na divisão por 4; o que torna impossível a igualdade.

Pauta de Correção:

(a) Justificar que o quadrado de um inteiro é da forma $4k$ ou $4k + 1$. [0,50]

(b)
- Mostrar que $x^2 + y^2$ deixa resto 0, 1 ou 2 na divisão por 4, [0,25]
- Observar que 103 deixa resto 3 na divisão por 4. [0,25]
- Concluir o exercício. [0,25]

Solução Alternativa

(a) Dado um número inteiro x temos que

$$x \equiv 0 \mod 4,\ x \equiv 1 \mod 4,\ x \equiv 2 \mod 4 \text{ ou } x \equiv 3 \mod 4$$

Daí,

$$x^2 \equiv 0 \mod 4 \text{ ou } x^2 \equiv 1 \mod 4$$

Portanto, o quadrado de qualquer número inteiro deixa resto 0 ou 1, quando dividido por 4.

(b) Suponha que existam inteiros x, y e z tais que $x^2 + y^2 - 8z = 103$.
Segue daí que, $x^2 + y^2 = 8z + 103$ e assim $x^2 + y^2 \equiv 3 \mod 4$.
Pelo item (a), temos que $x^2 + y^2 \equiv 0,\ 1 \text{ ou } 2 \mod 4$ e chegamos à uma contradição.
Portanto, não existem inteiros x, y e z tais que $x^2 + y^2 - 8z = 103$.

Pauta de Correção :

(a)
- Estabelecer a congruência de x módulo 4. [0,25]
- Concluir a congruência de x^2 módulo 4. [0,25]

(b)
- Mostrar que $x^2 + y^2$ deixa resto 0, 1 ou 2 na divisão por 4. [0,25]
- Observar que 103 deixa resto 3 na divisão por 4. [0,25]
- Concluir o exercício. [0,25]

Questão 06 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere a sequência $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \ldots$ formada por duplas de números inteiros iguais, iniciando em $1, 1$, sendo cada número da dupla seguinte o sucessor do número da dupla anterior.

Seja $f(n)$ a **soma** dos n primeiros termos da sequência acima.

(a) Calcule $f(23)$ e $f(50)$.

(b) Determine expressões para $f(n)$ em função de n, no caso em que n é par e no caso em que n é ímpar.

Solução

(a)
$$f(23) = 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + 11 + 11 + 12 = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots 11) + 12 = 2 \cdot \left(\frac{1+11}{2}\right) \cdot 11 + 12 = 144$$
$$f(50) = 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + 25 + 25 = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) = 2 \cdot \left(\frac{1+25}{2}\right) \cdot 25 = 2 \cdot 13 \cdot 25 = 650$$

(b) No caso n par temos que
$$f(2) = 1 + 1 = 2, f(4) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

Para n par
$$f(n) = 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = 2 \cdot \left(1 + 2 + \cdots + \frac{n}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1 + \frac{n}{2}}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{4}$$

No caso n ímpar, temos que
$$f(1) = 1, f(3) = 1 + 1 + 2 = 4$$

Para n ímpar
$$f(n) = \underbrace{1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}}_{n-1 \text{ termos}} + \frac{n-1}{2} + 1$$

Como n é ímpar, temos que $n - 1$ é par e usando o item (a) obtemos
$$f(n) = \frac{(n-1)(n+1)}{4} + \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Pauta de Correção:

(a)
- Calcular $f(23)$. [0,25]
- Calcular $f(50)$.[0,25]

(b)
- Determinar a expressão para n par. [0,50]
- Determinar a expressão para n ímpar. [0,25]

Questão 07 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c) 0,25]**

Sejam ℓ e L os comprimentos dos lados de polígonos regulares de n e $2n$ lados, respectivamente, inscritos em um círculo de raio r.

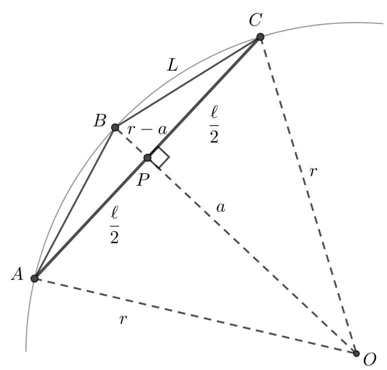
(a) Determine o comprimento a do *apótema* do polígono de n lados em função de r e ℓ. Lembre que o apótema é a menor distância do centro a um lado do polígono.

(b) Mostre que $L^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell^2}$.

(c) Use o item (b) para determinar a medida do lado do polígono regular de 12 lados inscrito em um círculo de raio r.

Solução

Sejam A, B e C vértices consecutivos do polígono de $2n$ lados e O o centro do círculo que o circunscreve.
Assim, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = L$.



O segmento AC mede ℓ pois é o lado do polígono de n lados. Seja P a interseção de OB com AC. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, podemos concluir que P é o ponto médio de AC, e, portanto, OP é altura do triângulo isósceles OAC. Daí, OP é o apótema do polígono de n lados.
Temos, assim, os triângulos retângulos OPC, de catetos medindo $\overline{OP} = a, \overline{PC} = \dfrac{\ell}{2}$ e hipotenusa $\overline{OC} = r$, e BCP de catetos $\overline{BP} = r - a, \overline{PC} = \dfrac{\ell}{2}$ e hipotenusa $\overline{BC} = L$

(a) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OPC temos que

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \iff a = \frac{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}{2}$$

(b) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCP, temos

$$L^2 = (r-a)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \iff L^2 = r^2 - 2ar + a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

Usando a identidade do item (a), temos que

$$L^2 = r^2 - 2ar + \underbrace{a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}_{r^2} \iff L^2 = 2r^2 - 2r\frac{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}{2}.$$

Daí, temos a igualdade procurada

$$L^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell^2}.$$

(c) Se ℓ é a medida do lado do hexágono regular inscrito no círculo de raio r, sabemos que $\ell = r$. Assim, denotando por L o lado do polígono regular de 12 lados, pelo item (b) temos

$$L^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell^2} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2} = 2r^2 - r\sqrt{3r^2} = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2\left(2 - \sqrt{3}\right).$$

Com isso,

$$L = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Construir a figura. [0,25]
- Calcular o apótema. [0,25]

(b)
- Escrever uma relação entre a, r, ℓ e L. [0,25]
- Provar o que foi pedido. [0,25]

(c)
- Encontrar $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

(a) Dispomos de 7 bolas pretas, indistinguíveis entre si, e de 5 bolas brancas, indistinguíveis entre si.

De quantas formas distintas podemos colocar em fila essas 12 bolas?

(b) De quantas formas podemos colocar em fila 12 números inteiros distintos, sendo 7 números pares e 5 números ímpares, de forma que os números pares entre si e os números ímpares entre si estejam em ordem crescente?

Solução

(a) Se todas fossem distintas, a resposta seria 12!. Como as bolas pretas são indistinguíveis entre si, assim como as bolas brancas, isso faz com que tenhamos 7! anagramas idênticos de bolas pretas e 5! anagramas idênticos de bolas brancas, para cada um dos 12! anagramas.

Logo a resposta é $\dfrac{12!}{7!\,5!} = 792$.

(b) Se tanto os números pares entre si e os ímpares entre si estão em ordens crescentes, pelo item (a), é como se tivéssemos 7 bolas pretas indistinguíveis entre si, assim como as 5 bolas brancas, já que as posições relativas entre os pares entre si e os ímpares entre si, não devem ser modificadas.

Logo, a resposta é $\dfrac{12!}{7!\,5!} = 792$.

Solução Alternativa

(a) Temos 12 bolas, das quais 7 são pretas indistinguíveis entre si e 5 são brancas indistinguíveis entre si.

Basta escolhermos a posição das 7 pretas, o que pode ser feito de $\dbinom{12}{7}$ maneiras.

Depois é só colocar as 5 brancas nas 5 posições vazias, o que pode ser feito de uma maneira.

Portanto a resposta é $\dbinom{12}{7} \cdot 1 = \dfrac{12!}{7!\,5!} = 792$.

(b) Este problema é semelhante ao item (a), pois quando escolhermos as posições dos números pares só haverá uma maneira de posicioná-los, visto que são distintos e devem ficar em ordem crescente. O mesmo vale para os números ímpares.

Começamos escolhendo as 7 posições para os números pares. Isso pode ser feito de $\dbinom{12}{7}$ maneiras.

Agora colocamos os 7 números pares nessas posições em ordem crescente, o que pode ser feito de apenas uma maneira.

As 5 posições restantes serão ocupadas de modo único pelos números ímpares, pois também devem ser colocados em ordem crescente.

Portanto a resposta é $\dbinom{12}{7} = \dfrac{12!}{7!\,5!} = 792$.

Pauta de Correção:

(a)
- Determinar a permutação total se fossem distintas. [0,25]
- Concluir que é com repetição e calcular corretamente. [0,25]

(b) Calcular corretamente. [0,75]