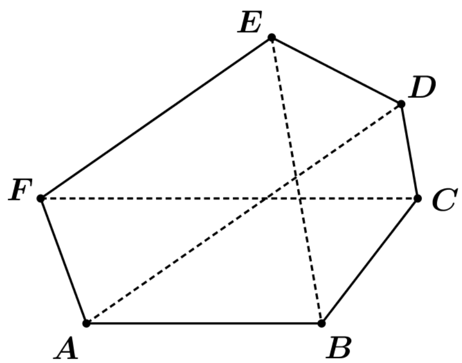
ENQ – 2024.1 – Gabarito com Pautas

Questão 01 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

No hexágono convexo $ABCDEF$ da figura, AB é paralelo a FC, CD é paralelo a BE, e EF é paralelo a DA.

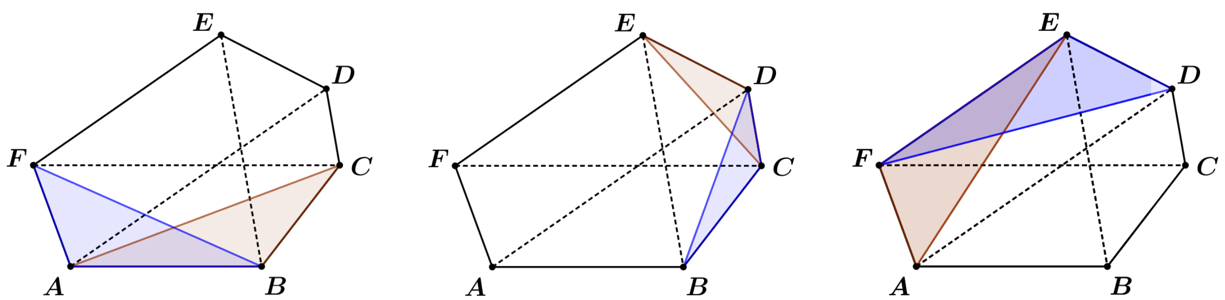


(a) Se as áreas dos triângulos ABC, CDE e EFA são, respectivamente, x, y e z, determine as áreas dos triângulos ABF, CDB e EFD, em função de x, y e z.

(b) Mostre que as áreas dos triângulos ACE e BDF são iguais.

Solução:

(a)

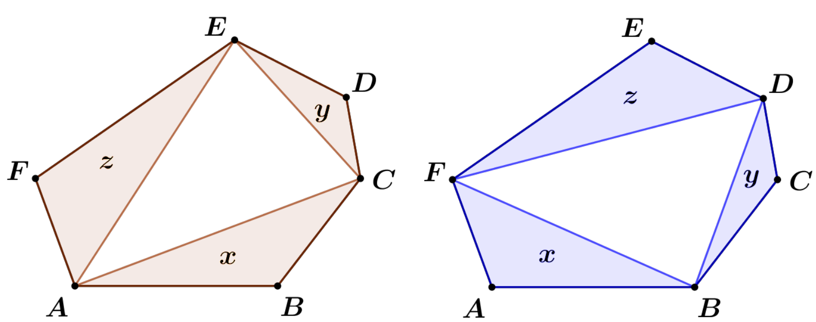


Como a reta suporte de AB é paralela a FC, os triângulos ABC e ABF possuem mesma altura em relação à base comum AB. Com isso, suas áreas são iguais. Portanto, a área do triângulo ABF é x.

Da mesma forma, como a reta suporte de CD é paralela a BE, os triângulos CDE e CDB têm a mesma área. Logo a área de CDB é y.

Igualmente, EFA e EFD têm a mesma área, logo a área de EFD é z.

(b)



Sendo S a área do hexágono, podemos ver que as áreas dos triângulos ACE e BDF são ambas dadas por $S-x-y-z$ e, portanto, são iguais.

Pauta de Correção:

Item (a):

- Para pelo menos um par de triângulos, argumentar que têm a mesma base. [0,25]
- Para pelo menos um par de triângulos, argumentar que as alturas são iguais, pois a base é paralela à reta que contém os vértices. [0,25]
- Concluir que as áreas de ABF, CDB e EFD são iguais, respectivamente, a x, y e z. [0,25]

Item (b):

- Obter a área do triângulo ACE ou a área de BDF é dada por $S - x - y - z$. [0,25]
- Obter o mesmo para o outro triângulo. [0,25]

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]

(a) Liste todos os números primos entre 1 e 30.

(b) Ache a decomposição de 30! em fatores primos.

Solução:

(a) Os números primos entre 1 e 30 são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29.

(b) Vamos calcular as potências dos primos que aparecem na decomposição do número 30!:

Temos que

$$E_2(30!) = 15 + 7 + 3 + 1 = 26, E_3(30!) = 10 + 3 + 1 = 14, E_5(30!) = 6 + 1 = 7$$
$$E_7(30!) = 4, E_{11}(30!) = 2, E_{13}(30!) = 2$$
$$E_{17}(30!) = E_{19}(30!) = E_{23}(30!) = E_{29}(30!) = 1$$

Portanto,

$$30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

Pauta de Correção:

(a) - $[0, 25]$

(b)
- Listar os primos que aparecem na decomposição de 30!. [0,25]
- Calcular as potências dos primos que aparecem na decomposição de 30!. [0,50]
- Escrever a decomposição de 30!. [0,25]

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

Um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais é tal que $p(0) = 1$, $p(2) = 3$ e $p(3) = 3$.

(a) Determine o único polinômio do segundo grau nas condições dadas.

(b) Exiba, caso exista, um polinômio do terceiro grau nas condições dadas.

Solução:

(a) Um polinômio do segundo grau é da forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Então $p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ e assim $c = 1$.

As outras condições são $p(2) = 4a + 2b + 1 = 3$ e $p(3) = 9a + 3b + 1 = 3$.

Logo temos que resolver o sistema $4a + 2b = 2, 9a + 3b = 2$, cuja solução é $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$.

Portanto $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$.

(b) Um polinômio de grau 3 é da forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com a, b, c e d números reais e $a \neq 0$.

Se tivermos o valor de p em 3 números distintos de x, então é único o polinômio de grau 2 que satisfaz as condições do problema, conforme foi visto no item (a).

No entanto, há infinitos polinômios de grau 3 que satisfazem as condições do problema.

Logo podemos colocar $a = 1$ e usar as três informações para determinar b, c e d.

Agora o procedimento fica similar ao adotado no item(a).

Temos que $p(0) = 1 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$ e assim $d = 1$.

As outras condições são $p(2) = 2^3 + 4b + 2c + 1 = 3$ e $p(3) = 3^3 + 9b + 3c + 1 = 3$.

Logo temos que resolver o sistema $4b + 2c = -6, 9b + 3c = -25$, cuja solução é $b = -\frac{16}{3}$ e $c = \frac{23}{3}$.

Portanto, um polinômio que satisfaz as condições é $p(x) = x^3 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{23}{3}x + 1$.

Solução Alternativa

(a) O polinômio $p(x) = a(x-2)(x-3) + 3$ satisfaz $p(2) = p(3) = 3$.

A outra condição é $p(0) = 1$ e assim devemos ter $p(0) = a(0-2)(0-3) + 3 = 1$. Logo $a = -\frac{1}{3}$.

Portanto $p(x) = -\frac{1}{3}(x-2)(x-3) + 3 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$.

(b) Podemos usar o polinômio obtido no item (a), pois $q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 + x(x-2)(x-3)$ é um polinômio de grau 3 que satisfaz as condições do enunciado.

Pauta de Correção:

(a)
- Calcular corretamente os coeficientes do polinômio. [0,50]
- Escrever o polinômio corretamente. [0,25]

(b) Escrever um polinômio com argumentação. [0,50]

Questão 04 [1,25]

Considere a sequência de Fibonacci (u_n) definida recursivamente por

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \geqslant 2, \text{ com } u_1 = u_2 = 1.$$

Sabendo que o número real q é raiz da equação $x^2 = x + 1$, mostre que

$$q^n = u_n q + u_{n-1}, \quad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Solução:

Faremos a prova por indução sobre n.

- Para $n = 2$, temos que $q^2 = u_2 q + u_1 = q + 1$ e a afirmação é verdadeira, pois q é raiz da equação $x^2 = x + 1$.
- Suponha $q^n = u_n q + u_{n-1}$, para um certo $n \geqslant 2$. Multiplicando por q obtemos $q^{n+1} = q^2 u_n + q u_{n-1}$. Substituindo $q^2 = q + 1$, temos que

$$q^{n+1} = (q+1)u_n + q u_{n-1} = q(u_n + u_{n-1}) + u_n = q u_{n+1} + u_n$$

  Logo, a afirmação é válida para $n + 1$.
  Portanto, $q^n = u_n q + u_{n-1}$, para todo $n \geqslant 2$.

Pauta de Correção:

- Mostrar para $n = 2$. [0,25]
- Supor válido para $n \geqslant 2$ e considerar o caso $n + 1$. [0,25]
- Mostrar a validade no caso $n + 1$. [0,50]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 05 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25**]

Na loteria *Septena*, são sorteados 7 números distintos, de 01 a 50, e a ordem com que estes números são sorteados não importa. Uma *aposta simples* é feita escolhendo-se 7 números, na tentativa de acertar os 7 números que serão sorteados.

(a) Se Antônio fez uma aposta simples, determine a probabilidade de ele acertar exatamente 6 dos 7 números sorteados.

(b) Se Antônio fez uma aposta simples, de quantas formas os 7 números podem ser sorteados para que Antônio acerte exatamente 5 números?

(c) Se Antônio fez uma aposta simples, determine a probabilidade de ele acertar exatamente 5 números.

Solução:

(a) Para que Antônio acerte exatamente 6 dentre os 7 números da *Septena*, devem ser sorteados 6 dentre os 7 números escolhidos por Antônio, de $C(7,6) = \binom{7}{6}$ formas possíveis, e sorteado 1 dentre os 43 números não escolhidos por Antônio, de $C(43,1) = 43$ formas possíveis. Assim, são $C(7,6) \cdot C(43,1) = \binom{7}{6} \cdot 43$ as formas de sortear os 7 números que fazem Antônio acertar exatamente 6 números.

Considerando que os 7 números da *Septena* podem ser sorteados em um total de $C(50,7) = \binom{50}{7}$ formas diferentes, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{C(7,6) \cdot C(43,1)}{C(50,7)} = \frac{\binom{7}{6} \cdot 43}{\binom{50}{7}} = \frac{7 \cdot 43}{\frac{50!}{7!43!}} = 7 \cdot 43 \cdot \frac{7!43!}{50!} = \frac{43}{50 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 44 \cdot 3} = \frac{43}{14.269.200}$$

(b) Como no item anterior, para que Antônio acerte exatamente 5 números, os 7 números podem ser sorteados de $C(7,5) \cdot C(43,2) = \binom{7}{5} \cdot \binom{43}{2} = 18963$ formas diferentes. Isso corresponde a $C(7,5) = \binom{7}{5}$ formas de sortear 5 entre os 7 números escolhidos por Antônio e $C(43,2) = \binom{43}{2}$ formas de sortear 2 números não escolhidos por ele.

(c) Utilizando o resultado do item anterior e considerando todas as $C(50,7) = \binom{50}{7}$ formas possíveis de sortear os 7 números, a probabilidade de Antônio acertar exatamente 5 números é dada por:

$$P = \frac{C(7,5) \cdot C(43,2)}{C(50,7)} = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{50}{7}} = \frac{21 \cdot 43 \cdot 21}{\frac{50!}{7!43!}} = 21 \cdot 43 \cdot 21 \cdot \frac{7!43!}{50!} = \frac{43 \cdot 7 \cdot 3}{50 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 44} = \frac{903}{4.756.400}$$

Pauta de Correção:

(a)
- Escreveu alguma das expressões $C(7,6) \cdot C(43,1)$, $C(7,6) \cdot 43$ ou $\binom{7}{6} \cdot 43$ como número de combinações favoráveis. [0,25]
- Chegou à expressão correta da probabilidade, em qualquer uma das formas $\dfrac{C(7,6) \cdot C(43,1)}{C(50,7)}$, $\dfrac{\binom{7}{6} \cdot 43}{\binom{50}{7}}$ ou equivalente. [0,25]

(b)
- Escreveu pelo menos uma das expressões $C(7,5)$ ou $\binom{7}{5}$ como as formas de sortear 5 números corretos; ou pelo menos uma das expressões $C(43,2)$ ou $\binom{43}{2}$ como as formas de sortear 2 números incorretos. [0,25]
- Chegou a $\binom{7}{5} \cdot \binom{43}{2}$. [0,25]

(c)
- Escrever a expressão $\dfrac{\binom{7}{5} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{50}{7}}$. [0,25]

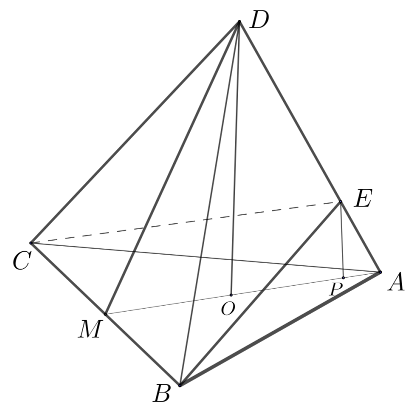
Questão 06 [1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]

O tetraedro regular $ABCD$ tem arestas medindo $2\sqrt{3}$. Sobre a aresta AD, toma-se o ponto E tal que AE mede 1.

a) Determine a altura do tetraedro $ABCE$ em relação à base ABC.

b) Determine a razão entre o volume do tetraedro $ABCE$ e o volume do tetraedro $ABCD$.

Solução:



(a) Traçando a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC, temos que o ponto O será o centro da face, pois o tetraedro é regular. Seja M o ponto médio de BC, AM é a altura do triângulo ABC relativa à BC e por Pitágoras, temos que $\overline{AM} = 3$. Sabendo que $\overline{AO} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM} = 2$ e usando o teorema Pitágoras no triângulo AOD, encontramos $H = \overline{OD} = 2\sqrt{2}$.

A altura traçada do ponto E no tetraedro $ABCE$ terá como pé o ponto P sobre o segmento AM . Observando que os triângulos ADO e AEP são semelhantes , temos que a medida h de EP é dada por

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Como $H = 2\sqrt{2}$, encontramos $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(b) Como os tetraedros $ABCE$ e $ABCD$ possuem a mesma face ABC como base, a razão entre os volumes V_1 de $ABCE$ e V_2 de $ABCD$ será a razão entre as alturas. Do item (a), temos que

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Pauta de Correção:

(a)
- Calcular $\overline{AM} = 3$. [0,25]
- Calcular $\overline{OD} = H = 2\sqrt{2}$, ou outro segmento auxiliar para o cálculo de $\overline{EP}$. [0,25]
- Calcular $\overline{EP} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. [0,25]

(b)
- Observar que a razão entre os volumes é a razão entre as alturas, entre as medidas dos segmentos AE e AD ou qualquer outra argumentação. [0,25]
- Calcular a razão entre os volumes. [0,25]

Questão 07 **[1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50]**

Seja $f(x) = x \cdot 2^x$, com x real e positivo.

(a) Prove que $f(x)$ é estritamente crescente, e portanto injetiva, no intervalo $(0, +\infty)$.

(b) Sabendo que $f(c) = 12$, determine x em função de c na equação $x \cdot 8^x = 4$.

Solução:

(a) Sejam $0 < x_1 < x_2$ números reais positivos. A função exponencial $y = 2^x$ é crescente, pois sua base é um número maior que 1, logo

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

Como $x_1 > 0$, temos que $x_1 \cdot 2^{x_1} < x_1 \cdot 2^{x_2}$. Agora, sabendo que $x_1 < x_2$, temos $x_1 \cdot 2^{x_2} < x_2 \cdot 2^{x_2}$. Assim,

$$x_1 \cdot 2^{x_1} < x_2 \cdot 2^{x_2} \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Portanto, f é estritamente crescente, e portanto, injetiva.

(b)

$$\begin{aligned} x \cdot 8^x &= 4 \\ x \cdot 2^{3x} &= 4 \\ 3x \cdot 2^{3x} &= 12 \\ f(3x) &= 12 \end{aligned}$$

Como f é injetiva e $f(c) = 12$, temos que $3x = c$ e, daí, $x = \dfrac{c}{3}$.

Pauta de Correção:

(a)
- Usar o fato que a função exponencial é crescente. [0,25]
- Usar a hipótese de que os números são positivos. [0,25]
- Manipular corretamente as desigualdades. [0,25]

(b)
- Concluir que a equação é equivalente a $f(3x) = 12$. [0,25]
- Usar a injetividade para calcular x. [0,25]

Questão 08 [**1,25**]

Se p é um número primo ímpar e diferente de 5, mostre que

$$p^2 \equiv 1 \mod 10 \text{ ou } p^2 \equiv -1 \mod 10.$$

Solução:

Como p é primo ímpar e diferente de 5, tem-se que

$$p \equiv 1, 3, 7, 9 \mod 10$$

Daí,

$$p^2 \equiv 1, 9 \mod 10$$

Portanto,

$$p^2 \equiv 1 \mod 10 \text{ ou } p^2 \equiv -1 \mod 10$$

Pauta de Correção:

- Calcular $p \mod 10.[0,5]$
- Calcular $p^2 \mod 10.$ $[0,5]$
- Concluir o resultado.$[0,25]$

Solução Alternativa

Como p é ímpar, tem-se que $p^2 \equiv 1 \equiv -1 \mod 2$.

Além disso, como p é primo e diferente de 5, $p \equiv 1, 2, 3, 4 \mod 5$, e daí $p^2 \equiv 1, 4 \mod 5$.

Assim, $p^2 \equiv 1 \mod 5$ ou $p^2 \equiv -1 \mod 5$. Como $(2, 5) = 1$, concluímos que

$$p^2 \equiv 1 \mod 10 \text{ ou } p^2 \equiv -1 \mod 10.$$

Pauta de Correção:

- Calcular $p^2 \mod 2$. [0,25]
- Calcular $p \mod 5$. [0,25]
- Calcular $p^2 \mod 5$. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,50]