PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ENQ – 2024.2 – Gabarito com Pautas

Questão 01 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]**

Considere um número natural a representado, na base 10, por $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$.

(a) Mostre que a é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ é divisível por 3.

(b) Mostre que a é divisível por 8 se, e somente se, o número $a_2 a_1 a_0$ formado pelos três últimos algarismos de a é divisível por 8.

(c) Encontre todos os números da forma $a = a_5 9411 a_0$ que sejam divisíveis por 24.

Solução:

(a) Temos que $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$.

Então $a = a_n(\underbrace{999\ldots9}_{n \text{ noves}} + 1) + a_{n-1}(\underbrace{999\ldots9}_{n-1 \text{ noves}} + 1) + \cdots + a_3(999+1) + a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0$.

Segue que $a = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 + 9k$, com k inteiro, logo 3 divide $a - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$.

Portanto, a é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ é divisível por 3.

(b) Temos que $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$.

Então $a = a_n(2\cdot5)^n + a_{n-1}(2\cdot5)^{n-1} + \cdots + a_3(2\cdot5)^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$.

Segue que, $a = 2^3 \cdot k + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 8 \cdot k + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$, com k inteiro.

Logo, $a - (a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)$ é divisível por 8.

Portanto, a é divisível por 8 se, e somente se, o número $a_2 a_1 a_0$ formado pelos três últimos algarismos de a é divisível por 8.

(c) Como 3 e 8 são primos entre si e $24 = 3 \cdot 8$, o número a tem que ser divisível por 3 e 8.

Tomando $a_5 = 1$ e $a_0 = 2$, obtemos $a = 194112$ divisível por 24.

Há outros dois números que também são divisíveis por 3 e 8: 494112 e 794112.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever $a = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 + 9k$. [0,25]
- Justificar o critério. [0,25]

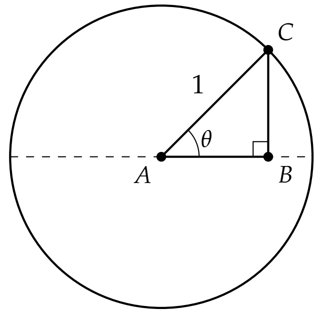
(b)
- Escrever $a = 8 \cdot k + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. [0,25]
- Justificar o critério. [0,25]

(c)
- Encontrar os três números. [0,25]

Questão 02 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere um círculo de centro A e raio 1, e um triângulo retângulo ABC conforme a figura abaixo.

Denotemos por θ o ângulo $B\hat{A}C$.



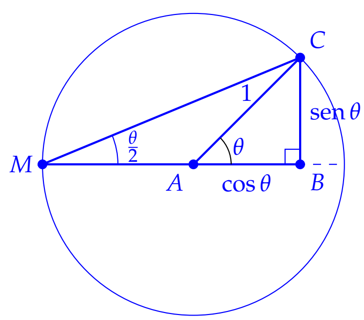
(a) Use o Teorema do ângulo inscrito para mostrar que $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}$.

(b) Calcule seno, cosseno e tangente de $15°$.

Solução:

(a) Como a hipotenusa do triângulo mede 1, temos que $\overline{AB} = \cos\theta$ e $\overline{BC} = \text{sen }\theta$.

Considere o ponto M do círculo, que pertence ao diâmetro que contém AB conforme a figura:



Note que $A\hat{M}C$ é o ângulo inscrito no círculo correspondente ao ângulo central θ, portanto $A\hat{M}C = \frac{\theta}{2}$.

Assim temos, no triângulo retângulo BMC, $\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MA}+\overline{AB}} = \frac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}$.

(b) Temos que $\text{tg } 15° = \frac{\text{sen } 30°}{1+\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2 \iff \overline{MC}^2 = (1+\cos\theta)^2 + \text{sen }^2\theta \iff \overline{MC} = \sqrt{2+2\cos\theta}$.

Assim segue que $\cos(15°) = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Logo $\text{sen }(15°) = \frac{\overline{BC}}{\overline{MC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Solução Alternativa:

Como $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, temos que $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Assim,

$$\cos^2 15^\circ = \frac{7+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}$$

$$\operatorname{sen}^2 15^\circ = 1 - \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}$$

.

Portanto, $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Pauta de Correção:

(a)
- Justificar que o ângulo $A\hat{M}C$ é $\dfrac{\theta}{2}$. [0,25]
- Calcular $\tan \dfrac{\theta}{2}$. [0,25]

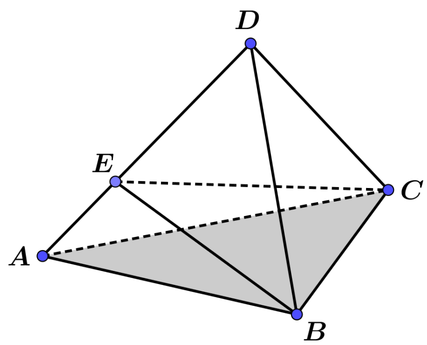
(b)
- Calcular a medida da hipotenusa MC ou relacionar as funções $\operatorname{tg} x$ e $\cos x$. [0,25]
- Calcular $\cos 15^\circ$. [0,25]
- Calcular sen15°. [0,25]

Questão 03 **[1,25]**

Sobre a aresta AD de um tetraedro $ABCD$ não necessariamente regular, toma-se um ponto E.

Sabendo que $\overline{AD} = 1$ e que o volume do tetraedro $ABCE$ é $\frac{1}{3}$ do volume do tetraedro $ABCD$, determine $\overline{AE}$.

Solução:



O volume do tetraedro $ABCD$ é dado por $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot h_D \cdot \mathcal{A}\,(ABC)$, onde h_D é a altura relativa à base ABC e $\mathcal{A}\,(ABC)$ é a área da base ABC.

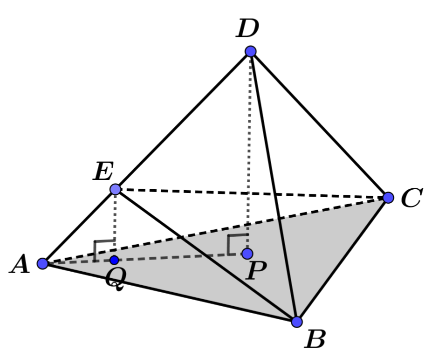
Da mesma forma, o volume do tetraedro $ABCE$ é $V_{ABCE} = \frac{1}{3} \cdot h_E \cdot \mathcal{A}\,(ABC)$, onde h_E é a altura relativa à base ABC.

Como $V_{ABCE} = \frac{1}{3} \cdot V_{ABCD}$,temos $\frac{1}{3} \cdot h_E \cdot \mathcal{A}\,(ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot h_D \cdot \mathcal{A}\,(ABC)$, e, portanto, $h_E = \frac{1}{3} \cdot h_D$ e então $h_D = 3\,h_E$.

Traçando a altura DP de $ABCD$ relativa à base ABC, temos um triângulo APD, com $A\hat{P}D = 90°$.

Traçando EQ tal que $A\hat{Q}E = 90°$, teremos EQ paralela a DP e, como DP é ortogonal ao plano de ABC, EQ também será ortogonal ao plano de ABC.

Com isso, EQ é a altura do tetraedro $ABCE$ em relação a ABC.



Os triângulos AQE e APD são semelhantes, portanto $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EQ}}{\overline{DP}}$.

Como $\overline{AD} = 1$ e $\overline{DP} = h_D = 3\,h_E$ e $\overline{EQ} = h_E$, temos $\frac{\overline{AE}}{1} = \frac{h_E}{3\,h_E}$, logo $\overline{AE} = \frac{1}{3}$.

Solução Alternativa:

Como na solução acima, concluímos que $h_D = 3\,h_E$.

Pelo ponto D tomamos o plano α e, pelo ponto E, o plano β, ambos paralelos ao plano da base ABC.

A distância entre α e o plano da base ABC é h_D e a distância entre β e o plano da base ABC é h_E.

Pelo teorema de Tales, temos que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \dfrac{h_D}{h_E} = \dfrac{3\,h_E}{h_e} = 3$.

Como $\overline{AD} = 1$, segue que $\overline{AE} = \dfrac{1}{3}$.

Pauta de Correção:

- Escrever os volumes dos tetraedros em função da área da base ABC e das respectivas alturas. [0,25]
- Obter que $h_D = 3\,h_E$ ou equivalente. [0,25]
- Perceber a semelhança entre os triângulos AEQ e ADP. [0,50]
- Obter $\overline{AE} = \dfrac{1}{3}$. [0,25]

Pauta de Correção da Solução Alternativa:

- Escrever os volumes dos tetraedros em função da área da base ABC e das respectivas alturas. [0,25]
- Obter que $h_D = 3\,h_E$ ou equivalente. [0,25]
- Aplicar corretamente o Teorema de Tales. [0,50]
- Obter $\overline{AE} = \dfrac{1}{3}$. [0,25]

Questão 04 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere a uma constante real positiva e diferente de 1 e a inequação

$$\log_a(x^2 + x + 1) < \log_a(x^2 - 9).$$

(a) Determine as condições de existência da inequação dada, ou seja, os valores reais de x para os quais as expressões que aparecem na inequação fazem sentido.

(b) Sabendo que $x = 4$ é uma solução, determine todos os valores de x que satisfazem a inequação.

Solução:

(a) Devemos ter $x^2 + x + 1 > 0$ e $x^2 - 9 > 0$.

Resolvendo as inequações obtemos $x^2 + x + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - 9 > 0 \iff x < -3$ ou $x > 3$.

Portanto, devemos procurar soluções nos casos $x < -3$ ou $x > 3$.

(b) Substituindo $x = 4$ na inequação obtemos $\log_a 21 < \log_a 7$, concluímos que $0 < a < 1$ (decrescente).

Segue que, se $x < -3$ ou $x > 3$, então $\log_a(x^2 + x + 1) < \log_a(x^2 - 9) \iff x^2 + x + 1 > x^2 - 9$.

Como $x^2 + x + 1 > x^2 - 9 \iff x > -10$, concluímos que a solução é dada por $-10 < x < -3$ ou $x > 3$.

Pauta de Correção:

(a)
- Escrever as inequações das condições de existência. [0,25]
- Resolver as inequações e dar a solução $x < -3$ ou $x > 3$. [0,25]

(b)
- Concluir que $0 < a < 1$. [0,25]
- Escrever a condição da solução. [0,25]
- Dar a solução. [0,25]

Questão 05 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Cada uma de 5 pessoas A, B, C, D e E escolhe um número de 1 a 10 aleatoriamente e guarda em segredo.

Em seguida, as pessoas A, B, C, D e E, nessa ordem, anunciam seus números, uma de cada vez.

(a) Qual é a probabilidade de que a terceira pessoa a anunciar seja a primeira a repetir um número já anunciado?

(b) Qual é a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes dela?

Solução:

(a) Vamos calcular a probabilidade dessas condições.

1. Probabilidade de as duas primeiras pessoas escolherem números diferentes: $P(\text{diferentes}) = \frac{10}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{10}$.

2. Probabilidade de a terceira pessoa repetir um dos números das duas primeiras: $P(\text{repetição}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

A probabilidade conjunta de que as duas primeiras pessoas escolham números diferentes e a terceira pessoa repita um desses números é:

$$P(\text{terceira pessoa repete}) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{50}.$$

Portanto, a probabilidade de que a terceira pessoa a anunciar seja a primeira a repetir um número anunciado é $\frac{9}{50}$.

(b) Para calcular a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes dela, vamos calcular primeiro a probabilidade de que ninguém repita um número anteriormente anunciado.

1. A probabilidade de que a segunda pessoa não repita o número da primeira: $P(\text{segunda não repete}) = \frac{9}{10}$.

2. A probabilidade de a terceira pessoa não repita os números das duas primeiras: $P(\text{terceira não repete}) = \frac{8}{10}$.

3. A probabilidade de a quarta pessoa não repita os números das três primeiras: $P(\text{quarta não repete}) = \frac{7}{10}$.

4. A probabilidade de a quinta pessoa não repita os números das quatro primeiras: $P(\text{quinta não repete}) = \frac{6}{10}$.

A probabilidade de que ninguém repita um número anteriormente anunciado é:

$$P(\text{nenhuma repetição}) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{3024}{10000} = \frac{189}{625}.$$

Portanto, a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes dela é:

$$P(\text{pelo menos uma repetição}) = 1 - P(\text{nenhuma repetição}) = 1 - \frac{189}{625} = \frac{436}{625}.$$

Portanto, a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes

dela é igual a $\frac{436}{625}$, ou seja, $0,6976$ ou 69,76%.

Pauta de Correção:

(a)
- Identificar as condições. [0,25]
- Calcular a probabilidade. [0,25]

(b)
- Calcular as probabilidades de não repetição para cada pessoa. [0,25]
- Calcular a probabilidade conjunta de não repetição. [0,25]
- Calcular a probabilidade de pelo menos uma repetição. [0,25]

(b′) Solução Alternativa (Contando os casos favoráveis diretamente).

1. Probabilidade da segunda pessoa escolher o número escolhido pela primeira: *aa*

$$\text{Número de possibilidades} = 10$$

$$\text{Probabilidade} = \frac{10}{10^2} = 10\%$$

2. Probabilidade da terceira pessoa escolher o número escolhido pela primeira: *aba*

$$\text{Número de possibilidades} = 10 \times 9 = 90.$$

Como temos também o caso da terceira pessoa escolher o número escolhido pela segunda, logo

$$\text{Probabilidade} = \frac{2 \times 90}{10^3} = 18\%$$

3. Probabilidade da quarta pessoa escolher o número escolhido pela primeira: *abca*

$$\text{Número de possibilidades} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Como temos também o caso da quarta pessoa escolher o número escolhido pela segunda ou terceira pessoa, logo

$$\text{Probabilidade} = \frac{3 \times 720}{10^4} = 21,6\%$$

4. Probabilidade da quinta pessoa escolher o número escolhido pela primeira: *abcda*

$$\text{Número de possibilidades} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Como temos também o caso da quinta pessoa escolher o número escolhido pela segunda ou terceira ou quarta pessoa, logo

$$\text{Probabilidade} = \frac{4 \times 5040}{10^5} = 20,16\%$$

Como são eventos disjuntos, a probabilidade de que pelo menos uma pessoa repita o número escolhido por outra pessoa antes dela é igual a

$$P = 10\% + 18\% + 21,6\% + 20,16\% = 69,76\%$$

Pauta de Correção da Solução Alternativa Item (b):

- Calcular 3. [0,25]
- Calcular 4. [0,25]
- Calcular $P = 69,76\%$.[0,25]

Questão 06 **[1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]**

(a) Determine a equação da reta que passa pelos pontos $\left(0, \dfrac{250}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{1000}{13}, 0\right)$.

(b) Determine todos os pontos (x, y) da reta do item (a), onde x e y são números naturais.

Solução:

(a) Escrevendo a equação da reta como $y = mx + n$, temos que $m = -\dfrac{\frac{250}{3}}{\frac{1000}{13}} = -\dfrac{13}{12}$.

Obtemos assim, a equação $y = -\dfrac{13}{12}x + \dfrac{250}{3}$.

(b) Temos que $y = -\dfrac{13}{12}x + \dfrac{250}{3} \iff 13x + 12y = 1000$.

Vamos resolver a equação diofantina $13x + 12y = 1000$.

Como $13 \cdot (1) + 12 \cdot (-1) = 1$, obtemos $13 \cdot (1000) + 12 \cdot (-1000) = 1000$.

Como procuramos soluções naturais, é conveniente escrevermos $13 \cdot (12 \cdot 83 + 4) + 12 \cdot (-1000) = 1000$

e daí $13 \cdot (4) + 12 \cdot (13 \cdot 83 - 1000) = 1000$ obtendo $13 \cdot (4) + 12 \cdot (79) = 1000$.

Logo $x_0 = 4$ e $y_0 = 79$ é uma solução natural da equação.

Assim as soluções naturais são $x = 4 + 12t$ e $y = 79 - 13t$; $t \in \mathbb{Z}$, com $t \geqslant 0$ e $79 - 13t \geqslant 0$, ou equivalentemente,

$x = 4 + 12t$ e $y = 79 - 13t$, com $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Portanto, $(x, y) \in \{(4, 79), (16, 66), (28, 53), (40, 40), (52, 27), (64, 14)$ e $(76, 1)\}$.

Pauta de Correção:

(a) • Encontrar a equação da reta. [0,25]

(b) • Escrever a equação diofantina. [0,25]

• Escrever a equação geral. [0,25]

• Determinar as soluções naturais. [0,50]

Questão 07 **[1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]**

Seja n um inteiro positivo.

(a) Determine o polinômio $q(X)$ tal que $X^{n+1} - 1 = (X-1) \cdot q(X)$.

(b) Mostre que, se n é par, então o polinômio $q(X)$ encontrado no item (a) não tem nenhuma raiz real.

Solução:

(a) Temos que $(X-1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1) = X^{n+1} - 1$ portanto, $q(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$.

(b) Temos que $p(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, logo 1 não é raiz. Suponha que x é um número real diferente de 1.

Como $x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ e $x \neq 1$, segue que $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Assim, $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$ se, e somente se, $x^{n+1} = 1$.

Como $n + 1$ é ímpar, não existe x real, diferente de 1, tal que $x^{n+1} = 1$.

Portanto, $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \neq 0$ para todo x real.

Pauta de Correção:

(a) Determinar $q(X)$. [0,25]

(b) • Verificar que 1 não é raiz. [0,25]

- Escrever que para $x \neq 1$, $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. [0,25]
- Observar que $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$ se, e somente se, $x^{n+1} = 1$. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 08 **[1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]**

Considere a_n a quantidade de sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(a) Determine a_1 e a_2.

(b) Encontre uma relação de recorrência de segunda ordem para a sequência a_n.

Solução:

(a) $a_1 = 2$, pois as sequências 0 e 1 têm um termo e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

Além disso, $a_2 = 3$, pois as sequências $01, 10$ e 11 têm dois termos e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(b) Vamos analisar o caso geral a_n para $n \geqslant 3$.

Para a_n temos dois tipos de soluções: aquelas em que o último algarismo é 1 e aquelas em que o último algarismo é 0.

• Caso 1: Se o último algarismo é um, o penúltimo pode ser zero ou um.

Logo, as $n - 1$ primeiras posições podem ser completados de a_{n-1} modos.

• Caso 2: Se o último algarismo é zero, o penúltimo deve ser 1, para evitar dois 0's consecutivos.

Logo devemos completar as $n - 2$ primeiras posições, o que pode ser feito de a_{n-2} modos.

Considerando ambos os casos acima concluímos que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Pauta de Correção:

(a) • Encontrar a_1. [0,25]

• Determinar a_2. [0,25]

(b) • Dividir a recorrência em dois casos. [0,25]

• Encontrar a equação de recorrência. [0,50]