ENQ – 2025.1 – Gabarito sem Pautas de Correção

Questão 01 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25**]

Considere o triângulo ABC tal que $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 7$ e $\overline{AC} = 8$.

(a) Determine a medida do ângulo $\alpha = B\hat{A}C$.

(b) Obtenha o seno dos ângulos $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = A\hat{C}B$.

(c) Determine o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Solução:

(a) Utilizando a Lei dos Cossenos, temos $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha)$.

Assim, $7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(\alpha)$, e, portanto, $49 = 89 - 80\cos(\alpha)$, que nos dá $\cos(\alpha) = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$.

Com isso, temos que $\alpha = 60°$.

(b) Pela Lei dos Senos, $\dfrac{\overline{AC}}{\text{sen}(\beta)} = \dfrac{\overline{AB}}{\text{sen}(\gamma)} = \dfrac{\overline{BC}}{\text{sen}(\alpha)}$.

Como $\alpha = 60°$, temos $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\dfrac{8}{\text{sen}(\beta)} = \dfrac{5}{\text{sen}(\gamma)} = \dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$.

Assim,

$$\frac{8}{\text{sen}(\beta)} = \frac{14}{\sqrt{3}} \therefore \text{sen}(\beta) = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$
$$\frac{5}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{14}{\sqrt{3}} \therefore \text{sen}(\gamma) = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

(c) Sendo R o raio do círculo circunscrito, ainda pela Lei dos Senos temos que

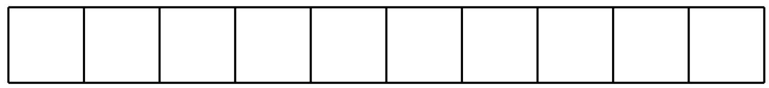
$$2R = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

logo

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Questão 02 [**1,25 ::: (a)=0,75; (b)=0,50**]

Um tabuleiro é formado por uma fileira com 10 quadrados justapostos.



(a) De quantas maneiras distintas uma peça verde e uma peça azul, de tamanhos iguais aos dos quadrados, podem ser dispostas em quadrados distintos no tabuleiro sem que estejam em quadrados adjacentes?

(b) Generalize o item anterior para um tabuleiro com n quadrados justapostos em uma fileira.

Solução:

(a) Vamos analisar as posições das duas peças no tabuleiro em dois casos:

Caso 1: A primeira peça é posicionada em uma das extremidades.

Há 2 possibilidades para posicionar a primeira peça e 8 possibilidades para posicionar a segunda peça (total menos a casa em que a primeira peça está e a casa adjacente a ela).

Total de $2 \cdot 8 = 16$ possibilidades.

Caso 2: A primeira peça é posicionada em um quadrado não extremo.

Há 8 possibilidades para posicionar a primeira peça e 7 possibilidades para posicionar a segunda peça (total menos a casa em que a primeira peça está e as duas casas adjacentes a ela).

Total de $8 \cdot 7 = 56$ possibilidades.

Sendo assim, somando os dois casos, há $16 + 56 = 72$ maneiras de posicionar as peças.

(b) Vamos analisar as posições das duas peças no tabuleiro nos mesmos dois casos do item anterior:

Caso 1: A primeira peça é posicionada em uma das extremidades.

Neste caso há 2 possibilidades para posicionar a primeira peça e $n - 2$ possibilidades para posicionar a segunda peça (total menos a casa em que a primeira peça está e a casa adjacente a ela).

Total de $2 \cdot (n - 2)$ possibilidades.

Caso 2: A primeira peça é posicionada em um quadrado não extremo.

Neste caso há $n-2$ possibilidades para posicionar a primeira peça e $n-3$ possibilidades para posicionar a segunda peça (total menos a casa em que a primeira peça está e as duas casas adjacentes a ela).

Total de $(n - 2) \cdot (n - 3)$ possibilidades.

Somando os dois casos, há $2 \cdot (n - 2) + (n - 2) \cdot (n - 3) = (n - 1)(n - 2)$ maneiras de posicionar as peças.

Solução Alternativa:

(a) Vamos determinar o total de possibilidades das posições das duas peças e depois retirar os casos em que as peças estão juntas.

Para posicionar a primeira peça temos 10 possibildades e para posicionar a segunda peça temos 9 possibilidades, ou seja, um total de $10 \cdot 9 = 90$ possibilidades.

Considerando as duas peças juntas caminhando da esquerda para a direita, teremos cada peça ocupando exatamente 9 posições e neste caso teremos $2 \cdot 9 = 18$ possibildades, visto que elas podem mudar de posições juntas.

Logo a resposta é $90 - 18 = 72$ possibilidades.

(b) Utilizando a mesma ideia do item (a),teremos:

Para posicionar a primeira peça temos n possibilidades e para posicionar a segunda peça temos $(n-1)$ possibilidades, ou seja, um total de $n \cdot (n-1)$ possibilidades.

Considerando as duas peças juntas caminhando da esquerda para a direita, teremos cada peça ocupando exatamente $(n-1)$ posições e neste caso teremos $2 \cdot (n-1)$ possibilidades, visto que elas podem mudar de posições juntas.

Logo a resposta é $n \cdot (n-1) - 2 \cdot (n-1) = (n-1) \cdot (n-2)$ possibilidades.

Questão 03 [**1,25**]

João irá gastar **totalmente** R$ 47,00 na compra de pacotes de confetes e de serpentinas. Cada pacote de confete custa R$ 1,50, e cada pacote de serpentina custa R$ 2,50. Encontre **todas** as formas que ele poderá efetuar essa compra.

Solução:
Indicando por x a quantidade de pacotes de confetes e por y a quantidade de pacotes de serpentinas temos que

$$1{,}5x + 2{,}5y = 47$$

ou equivalentemente

$$3x + 5y = 94$$

Obtemos assim uma equação diofantina e devemos encontrar todas as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Temos que $3 \cdot (2) + 5 \cdot (-1) = 1$, logo $3 \cdot (188) + 5 \cdot (-94) = 94$.

Substituindo $188 = 5 \cdot 37 + 3$ obtemos $3 \cdot (5 \cdot 37 + 3) + 5 \cdot (-94) = 94$, assim $3 \cdot (3) + 5 \cdot (17) = 94$.

Encontramos assim uma solução particular $x_0 = 3$ e $y_0 = 17$ e a solução geral em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ é dada por

$$\begin{cases} x &= 3 + 5t \\ y &= 17 - 3t \end{cases}$$,onde $t \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 0$ e $17 - 3t \geqslant 0$, logo $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Portanto, temos 6 formas para a compra:

$x_0 = 3$ e $y_0 = 17$, $x_1 = 8$ e $y_1 = 14$, $x_2 = 13$ e $y_2 = 11$, $x_3 = 18$ e $y_3 = 8$, $x_4 = 23$ e $y_4 = 5$, $x_5 = 28$ e $y_5 = 2$.

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=1,00]

Considere a função definida para todo $x \in \mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$.

(a) Use a desigualdade das médias para provar que $f(x) \geqslant 1$, para todo x real.

(b) Prove que $f(x) = a$ tem solução para todo $a \geqslant 1$ e determine tais soluções.

Solução:

(a) Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, sejam $a = 5^x$ e $b = 5^{-x}$. Como ambos são positivos, podemos aplicar a desigualdade das médias:

$$MA \geqslant MG \iff \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \iff \frac{5^x + 5^{-x}}{2} \geqslant \sqrt{5^x \cdot 5^{-x}} \iff f(x) \geqslant 1.$$

(b) Seja $a \geqslant 1$.

$$f(x) = a \iff \frac{5^x + 5^{-x}}{2} = a \iff 5^x + 5^{-x} = 2a \iff 5^{2x} - 2a \cdot 5^x + 1 = 0.$$

Fazendo $y = 5^x$, a igualdade acima equivale a

$$y^2 - 2ay + 1 = 0.$$

Temos agora que mostrar que, para $a \geqslant 1$, a equação acima admite solução positiva (uma vez que $y = 5^x > 0$).

Primeiramente observamos que o discriminante da equação é

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1) \geqslant 0,$$

uma vez que $a \geqslant 1$. Neste caso, as soluções são dadas pela fórmula resolutiva

$$y = \frac{2a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Precisamos apenas verificar o sinal de y em cada caso:

- No primeiro caso, temos que $a > 0$ e $\sqrt{a^2 - 1} > 0$ implicam que $y = a + \sqrt{a^2 - 1} > 0$.
- No segundo caso, como $a^2 > a^2 - 1 > 0$, temos que $a > \sqrt{a^2 - 1}$, e, portanto, $y = a - \sqrt{a^2 - 1} > 0$.

Observação: O fato de as raízes serem positivas poderia ser justificado também a partir da constatação que o produto das raízes é 1 e a soma delas é $2a > 0$.

Sendo assim, podemos calcular as soluções da equação em ambos os casos:

$$5^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \iff x_1 = \log_5(a + \sqrt{a^2 - 1}) \quad \text{ou} \quad x_2 = \log_5(a - \sqrt{a^2 - 1}).$$

Questão 05 [1,25]

Em uma loteria de 1000 números há um só prêmio em cada sorteio. Antônio compra 2 bihetes para um único sorteio e Paulo compra 2 bilhetes, um para cada um de 2 sorteios. Determine qual dos dois jogadores tem mais chance de ganhar algum prêmio.

Solução:

A probabilidade de Antônio ganhar algum prêmio é $P_1 = \dfrac{2}{1000}$.

A probabilidade de Paulo não ganhar algum prêmio é $\dfrac{(1000-1)^2}{1000^2}$.

Logo a probabilidade de Paulo ganhar algum prêmio é $P_2 = 1 - \dfrac{(1000-1)^2}{1000^2}$.

Temos que, $P_1 > P_2 \iff \dfrac{2}{1000} > 1 - \dfrac{(1000-1)^2}{1000^2} \iff 2000 > 1000^2 - (1000-1)^2 \iff 2000 > 2000 - 1$.

Portanto, Antônio tem mais chance de ganhar algum prêmio.

Solução Alternativa:

A probabilidade de Antônio ganhar algum prêmio é $P(\text{Antônio ganha}) = \dfrac{2}{1000} = 0,002$.

A probabilidade de Paulo ganhar pelo menos um prêmio pode ser calculada considerando os seguintes casos. Paulo,

- Ganha na primeira extração e perde na segunda: $P_1 = \dfrac{1}{1000} \times \dfrac{999}{1000} = \dfrac{999}{1000^2}$
- Perde na primeira extração e ganha na segunda: $P_2 = \dfrac{999}{1000} \times \dfrac{1}{1000} = \dfrac{999}{1000^2}$
- Ganha nas duas extrações: $P_3 = \dfrac{1}{1000} \times \dfrac{1}{1000} = \dfrac{1}{1000^2}$

Assim, a probabilidade total de Paulo ganhar pelo menos um prêmio é:

$$P(\text{Paulo ganha}) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{999}{1000^2} + \frac{999}{1000^2} + \frac{1}{1000^2} = \frac{1999}{1000^2} = 0,001999$$

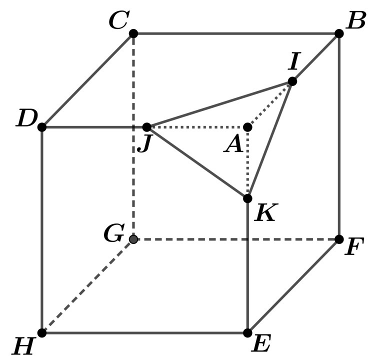
Antônio, portanto, tem maior chance de ganhar algum prêmio.

Questão 06 [**1,25**]

Considere que o cubo $ABCDEFGH$ da figura abaixo tem volume 1. O sólido da figura é formado retirando-se um tetraedro, a partir do vértice A, de forma que:

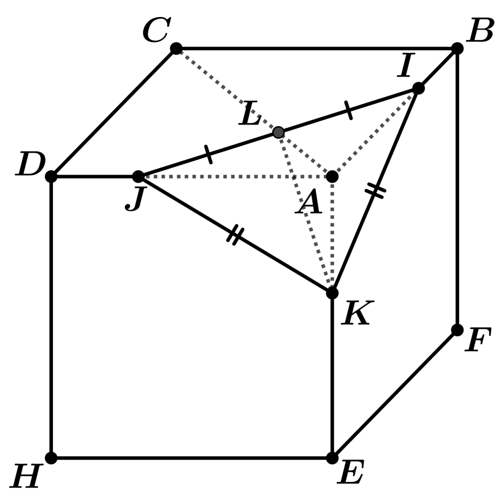
- o semiplano contendo a face IJK forme um ângulo de $135°$ com o semiplano contendo a face $IJDCB$,
- $\overline{JA} = \overline{IA}$,
- o volume do sólido resultante é $\dfrac{23}{24}$.

Determine $\overline{AI}$, $\overline{AJ}$ e $\overline{AK}$.



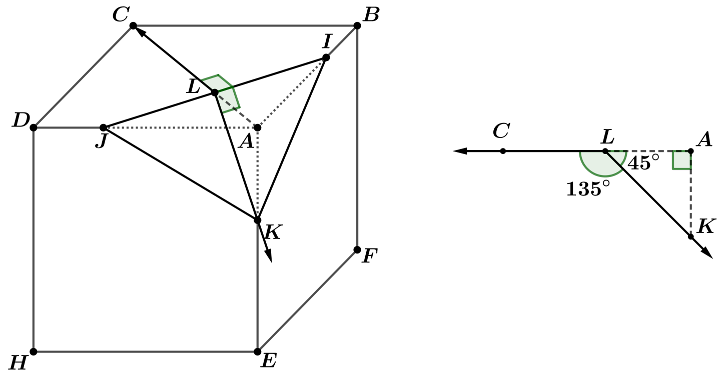
Solução:
Seja $x = \overline{AJ} = \overline{AI}$. Com isso, temos $\overline{IJ} = x\sqrt{2}$.

Considere o ponto L, interseção da diagonal AC da face $ABCD$ com o segmento IJ. Como $\overline{AJ} = \overline{AI}$, o segmento IJ é paralelo à diagonal BD e, com isso, AL é perpendicular a IJ. Além disso, como AIJ é isósceles, L é ponto médio de IJ.



Os triângulos KAJ e KAI são congruentes (caso LAL), portanto $\overline{KJ} = \overline{KI}$. Com isso, o triângulo JKI é isósceles com vértice K e, portanto, KL é perpendicular a IJ.

O ângulo de $135°$ entre os semiplanos que contêm as faces IJK e $IJDCB$ é o ângulo entre as semirretas $\overrightarrow{LK}$ e $\overrightarrow{LC}$ contidas nestes planos, respectivamente, e perpendiculares a IJ, conforme a figura abaixo:



Observando o triângulo AIJ, isósceles e retângulo em A, o segmento AL será a altura relativa à hipotenusa IJ e terá medida $\overline{AL} = \dfrac{\overline{AJ}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Observe que o triângulo ALK é retângulo em A, com $A\hat{L}K = 45°$. Com isso, temos que $A\hat{K}L = 45°$ e $\overline{AK} = \overline{AL} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Com isso, considerando AIJ como base e AK como altura do tetraedro $AIJK$, o volume deste tetraedro é dado por

$$\frac{1}{3}\overline{AK}\left(\frac{\overline{AI}\cdot\overline{AJ}}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}.$$

Sabemos, por outro lado, que o volume do tetraedro $AIJK$ é dado por $1 - \dfrac{23}{24} = \dfrac{1}{24}$, portanto

$$\frac{x^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{24} \therefore x^3 = \frac{12}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$$

portanto $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Com isso $\overline{AI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{AJ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\overline{AK} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Questão 07 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Mostre que

(a) $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 17, para todos os inteiros a e b que são primos com 17.

(b) $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 85, para todos os inteiros a e b que são primos com 85.

Solução:

(a) Sejam a e b inteiros tais que $(a, 17) = (b, 17) = 1$.

Usando o Pequeno Teorema de Fermat concluímos que

$$a^{16} \equiv 1 \bmod 17 \quad e \quad b^{16} \equiv 1 \bmod 17,$$

assim, $a^{16} - b^{16} \equiv 0 \bmod 17$.

Portanto, $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 17.

(b) Sejam a e b inteiros tais que $(a, 85) = (b, 85) = 1$.

Como $85 = 5 \cdot 17$, segue que $(a, 5) = (b, 5) = (a, 17) = (b, 17) = 1$.

Novamente pelo Pequeno Teorema de Fermat, $a^4 \equiv 1 \bmod 5$ e, daí, $a^{16} \equiv 1 \bmod 5$. Analogamente $b^{16} \equiv 1 \bmod 5$.

Portanto, $a^{16} - b^{16} \equiv 0 \bmod 5$, o que significa que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 5.

Como $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 5 e 17 e $(5, 17) = 1$, concluímos que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por $5 \cdot 17 = 85$.

Questão 08 [**1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75**]

Seja $f(x) = x^2 + x$. Mostre que

(a) Para todos $r, s \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{r+s}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(r)+f(s)}{2}$.

(b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \beta < 1$, então

$$f(\beta r + (1-\beta)s) \leqslant \beta f(r) + (1-\beta) f(s), \text{ para todos } r, s \in \mathbb{R}.$$

Solução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{r+s}{2}\right) \leqslant \frac{f(r)+f(s)}{2} &\iff \frac{(r+s)^2}{4} + \frac{r+s}{2} \leqslant \frac{r^2+r+s^2+s}{2} \\ &\iff (r+s)^2 + 2(r+s) \leqslant 2(r^2+r+s^2+s) \\ &\iff (r+s)^2 \leqslant 2(r^2+s^2) \\ &\iff r^2+s^2-2rs \geqslant 0 \\ &\iff (r-s)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Como a última desigualdade é sempre verdadeira, temos que $f\left(\dfrac{r+s}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(r)+f(s)}{2}$, para todos $r, s \in \mathbb{R}$.

(b) Temos, por um lado,

$$f(\beta r + (1-\beta)s) = \beta^2 r^2 + (1-\beta)^2 s^2 + 2\beta(1-\beta)rs + \beta r + (1-\beta)s.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \beta f(r) + (1-\beta) f(s) &= \beta(r^2+r) + (1-\beta)(s^2+s) \\ &= \beta r^2 + (1-\beta)s^2 + \beta r + (1-\beta)s. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(\beta r + (1-\beta)s) \leqslant \beta f(r) + (1-\beta) f(s) &\iff \beta^2 r^2 + (1-\beta)^2 s^2 + 2\beta(1-\beta)rs \leqslant \beta r^2 + (1-\beta)s^2 \\ &\iff \beta(\beta-1)r^2 + \beta(\beta-1)s^2 + 2\beta(1-\beta)rs \leqslant 0 \\ &\iff \beta(\beta-1)(r-s)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$, concluímos que a última desigualdade é sempre verdadeira, logo,

$f(\beta r + (1-\beta)s) \leqslant \beta f(r) + (1-\beta) f(s)$, para todos $r, s \in \mathbb{R}$.