

---

[01] Um dado não viciado será lançado duas vezes. Seja  $p_i$  a probabilidade da soma dos resultados obtidos ser igual a  $i$ . Então é correto afirmar que:

- (A)  $p_5 < p_6 < p_7$       (B)  $p_5 < p_6 < p_8$       (C)  $p_6 = p_8 < p_9$   
(D)  $p_5 = p_9 > p_8$       (E)  $p_5 < p_8 < p_9$

**Solução**

**Resposta: A**

Listamos as maneiras que pode ser obtida cada uma das somas abaixo:

5 : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

6 : (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

7 : (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

8 : (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)

9 : (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)

Como a quantidade de resultados possíveis é igual a 36 segue que:

$$p_5 = \frac{4}{36}, p_6 = \frac{5}{36}, p_7 = \frac{6}{36}, p_8 = \frac{5}{36}, p_9 = \frac{4}{36}$$

Assim a única alternativa correta é a (A).

---

[02] A soma das raízes reais da equação  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3x-4} + \frac{1}{x-6}$  é igual a

- (A) 12      (B)  $\frac{29}{2}$       (C)  $4\sqrt{6}$       (D)  $\frac{5}{2} + 4\sqrt{6}$       (E)  $\frac{5}{2}$

**Solução**

**Resposta: B**

Começamos somando as frações em ambos os lados e assim temos que

$$\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{4x-10}{(3x-4)(x-6)} \text{ que, para } x \notin \left\{2, 3, \frac{4}{3}, 6\right\}, \text{ pode ser reescrito}$$

como  $(2x-5)(3x-4)(x-6) = 2(2x-5)(x-2)(x-3)$ .

Se  $2x-5=0$  a identidade acima é verificada e assim  $x = \frac{5}{2}$  é uma solução.

Para  $2x-5 \neq 0$  dividimos a equação por  $2x-5$  e obtemos a equação do segundo grau

$$3x^2 - 22x + 24 = 2x^2 - 10x + 12, \text{ ou seja, } x^2 - 12x + 12 = 0.$$

As soluções desta equação são  $6 + 2\sqrt{6}$  e  $6 - 2\sqrt{6}$ .

Portanto a soma das soluções da equação original é igual a  $\frac{29}{2}$ .

---

[03] As ternas abaixo são medidas dos comprimentos dos lados de triângulos. Em qual das alternativas temos, nessa ordem, as medidas de um triângulo acutângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo obtusângulo?

- (A) (2, 3, 4), (3, 4, 5) e (4, 7, 8).
- (B) (4, 7, 8), (5, 12, 13) e (4, 8, 9).
- (C) (6, 7, 9), (4, 5, 6) e (4, 8, 9).
- (D) (8, 9, 11), (3, 4, 5) e (4, 6, 7).
- (E) (8, 10, 13), (6, 8, 10) e (4, 5, 7).

**Solução**

**Resposta: B**

Vamos analisar algumas ternas que aparecem nas respostas e comparar o quadrado do maior lado com a soma dos quadrados dos dois lados menores. Se o quadrado do lado maior for maior, o triângulo é obtusângulo; se for igual ele é retângulo; se for menor, é acutângulo.

(4, 7, 8):  $8^2 = 64 < 65 = 49 + 16 = 7^2 + 4^2$ , assim temos um triângulo acutângulo e o item (A) está incorreto.

(4, 5, 6):  $6^2 = 36 < 41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$ , assim temos um triângulo acutângulo e o item (C) está errado.

(5, 12, 13):  $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$ , assim temos um triângulo retângulo.

(4, 8, 9):  $9^2 = 81 > 80 = 64 + 16 = 8^2 + 4^2$ , assim temos um triângulo obtusângulo. Juntando os dois cálculos acima, segue que o item (B) está correto.

(4, 6, 7):  $7^2 = 49 < 52 = 36 + 16 = 6^2 + 4^2$ , assim temos um triângulo acutângulo e o item (D) está incorreto.

(8, 10, 13):  $13^2 = 169 > 164 = 100 + 64 = 10^2 + 8^2$ , assim temos um triângulo obtusângulo e o item (E) está incorreto.

[04] Se  $x$  e  $y$  são dois números reais tais que  $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$ , então  $x + y$  é igual a

- (A)  $\frac{5}{6}$
- (B)  $-\frac{1}{3}$
- (C)  $\frac{1}{2}$
- (D)  $-\frac{1}{6}$
- (E)  $\frac{1}{3}$

**Solução**

**Resposta: D**

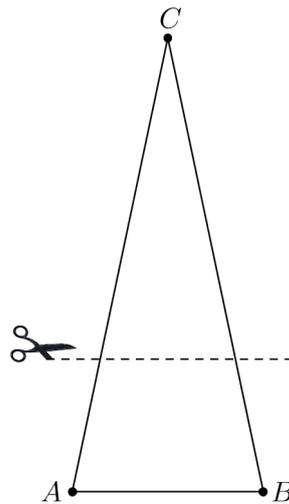
Completando os quadrados, a expressão  $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$  pode ser escrita na forma

$$(2x - 1)^2 + (3y + 2)^2 = 0.$$

Assim temos que  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = -\frac{2}{3}$ .

Portanto  $x + y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ .

[05] Considere um triângulo isósceles de base 5 e de altura 12. Decide-se cortar o triângulo paralelamente à base de modo que as duas novas figuras geradas (um novo triângulo isósceles e um trapézio) possuam a mesma área.



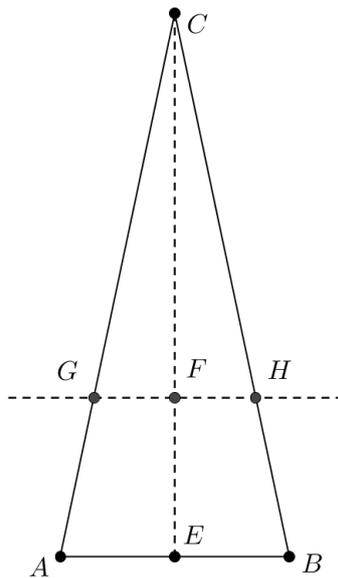
Nestas condições, a medida da base do novo triângulo isósceles será igual a

- (A)  $5\sqrt{2}$     (B)  $6\sqrt{2}$     (C)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$     (D)  $3\sqrt{2}$     (E)  $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

**Solução**

**Resposta: C**

Denominamos os novos pontos após o corte da seguinte forma:



Através da semelhança dos triângulos retângulos BCE e CFH que  $\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FH}}$ .

Denominando a altura do novo triângulo CGH por  $h$  e a sua base por  $b$ , temos da relação anterior que

$$\frac{12}{h} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow h = \frac{12b}{5}.$$

Ora, o corte do triângulo original foi feito de forma que a área do novo triângulo fosse metade do original, então temos que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b \cdot h = 30.$$

Utilizando a igualdade encontrada para  $h$  anteriormente, temos que  $b \cdot \frac{12b}{5} = 30 \Rightarrow b^2 = \frac{150}{12} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{50}{4}} \Rightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

### Outra Solução:

Sejam  $h = \overline{CF}$  e  $x = \overline{GH}$ . Logo  $\overline{FE} = 12 - h$ .

A área do triângulo  $ABC$  é igual a  $\frac{5 \times 12}{2} = 30$ .

Como desejamos que o triângulo  $GCH$  e o trapézio  $AGHB$  tenham a mesma

área, segue que  $\frac{xh}{2} = 15$  e  $\frac{5+x}{2} \cdot (12-h) = 15$ .

Assim temos que  $xh = 30$  e  $60 + 12x - 5h - xh = 30$ .

Substituindo  $xh$  por 30 na última equação temos que  $12x - 5h = 0$ , ou seja,  $h = \frac{12}{5}x$ .

Portanto  $x \frac{12}{5}x = 30$ , ou seja,  $x^2 = \frac{25}{2}$  e assim  $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

[06] Considere a seguinte distribuição de frequências das alturas, em metros, dos alunos de uma determinada turma:

Classe	Frequência
1,50  — 1,60	3
1,60  — 1,70	9
1,70  — 1,80	12
1,80  — 1,90	2

Lembre que a notação  $2|— 3$  é comumente usada em Estatística para representar o intervalo  $[2, 3)$ .

Sobre a distribuição é correto afirmar que:

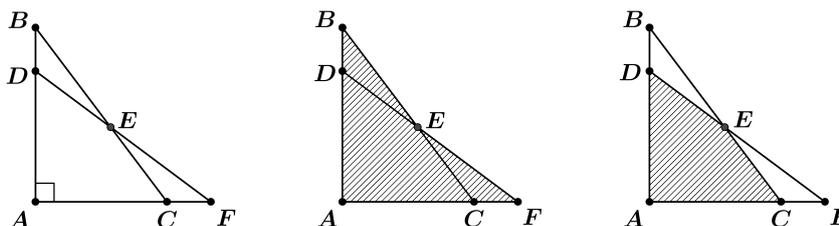
- (A) a média aritmética é inferior a 1,60 m.
- (B) a média aritmética pertence ao último quartil.
- (C) a mediana é igual à média aritmética.
- (D) a mediana pertence à terceira classe.
- (E) a pessoa mais alta da turma tem 1,90 m.

### Solução

Resposta: D

Somando as frequências, obtemos um total de 26 alunos na turma. O que significa que a mediana é a média aritmética entre as alturas que ocupam as posições de número 13 e 14 na distribuição. Como as duas primeiras classes somam 12 alunos, podemos concluir que a mediana está na terceira classe. Logo a resposta correta é a (D).

[07] Os triângulos retângulos  $ABC$  e  $AFD$  são congruentes e sobrepostos, conforme a figura abaixo à esquerda, sendo  $\overline{AB} = 4$  e  $\overline{AC} = 3$ .



Sabendo que área do polígono  $ABEF$ , destacado na figura do meio, é  $S$ , a área do quadrilátero  $ADEC$ , destacado na figura da direita, é igual a

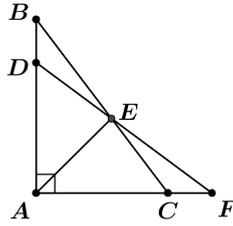
- (A)  $\frac{3S}{4}$
- (B)  $\frac{S}{2}$
- (C)  $\frac{9S}{16}$
- (D)  $\frac{7S}{8}$
- (E)  $\frac{2S}{3}$

**Solução**

**Resposta: A**

Como os triângulos  $ABC$  e  $AFD$  são congruentes, temos  $\overline{AF} = \overline{AB} = 4$  e  $\overline{AD} = \overline{AC} = 3$ . Traçando  $AE$ , como  $\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AF}$ , teremos

$$\text{Área}(ACE) = \frac{3}{4}\text{Área}(AFE).$$



Da mesma forma, como  $\overline{AD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ , teremos

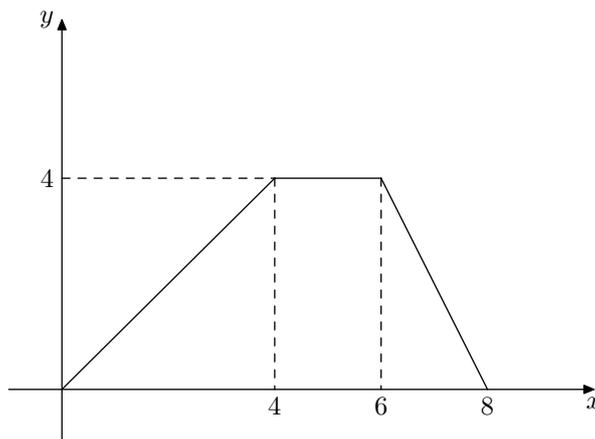
$$\text{Área}(ADE) = \frac{3}{4}\text{Área}(ABE).$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} \text{Área}(ADEC) &= \text{Área}(ACE) + \text{Área}(ADE) \\ &= \frac{3}{4}\text{Área}(AFE) + \frac{3}{4}\text{Área}(ABE) \\ &= \frac{3}{4}(\text{Área}(AFE) + \text{Área}(ABE)) \\ &= \frac{3}{4}\text{Área}(ABEF) \\ &= \frac{3S}{4}. \end{aligned}$$

---

[08] O gráfico da função  $y = f(x)$ , formado por três segmentos de reta, está representado na figura abaixo.



Sobre a função  $f$  podemos afirmar que:

- (A)  $f(2) + f(3) = f(5)$
- (B)  $f(1) + f(2) = f(7)$
- (C)  $f(2) + f(4) = f(5)$
- (D)  $f(5) - f(3) = f(7)$
- (E)  $f(7) - f(2) = f(8)$

**Solução****Resposta: E**

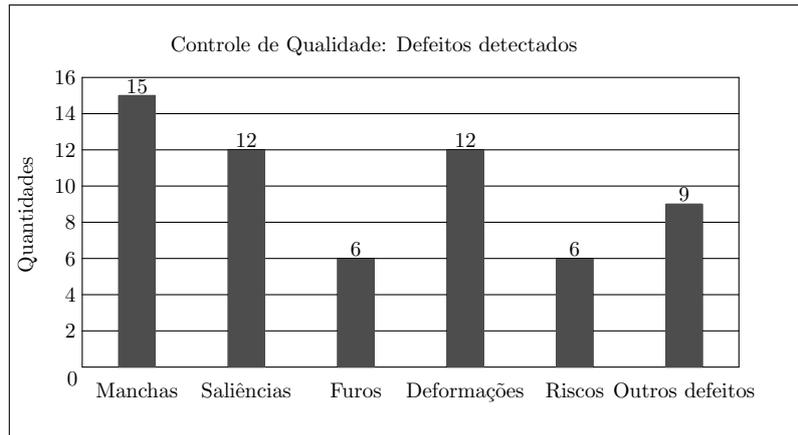
A equação da reta que passa pelos pontos  $(6, 4)$  e  $(8, 0)$  é dada por  $y = -2x + 16$ , logo  $f(7) = 2$ .

Além disso, temos que  $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 4, f(8) = 0$ .

A única afirmação correta é  $f(7) - f(2) = 2 - 2 = f(8)$ .

---

[09] O administrador responsável pelo controle de qualidade de uma fábrica de artigos plásticos registrou, em um gráfico, os diversos defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período, conforme abaixo.



É correto afirmar que

- (A) Os defeitos referentes às manchas superam em 15% as deformações.
- (B) As deformações consistem em 30% dos defeitos detectados.
- (C) 35% dos defeitos detectados correspondem a riscos ou manchas.
- (D) 45% dos defeitos detectados são de manchas, saliências ou furos.
- (E) Os problemas de deformação superam em 15% os problemas de furos nos produtos.

**Solução****Resposta: C**

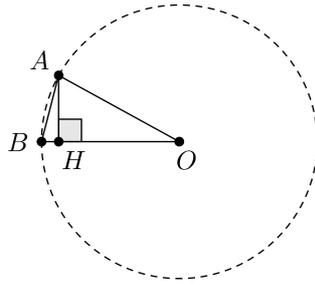
Foi detectado um total de  $15 + 12 + 6 + 12 + 6 + 9 = 60$  defeitos através do controle de qualidade. Inicialmente calculemos o valor percentual referente a cada tipo de defeito:

- Manchas:  $\frac{15}{60} \times 100 = 25\%$ ;
- Saliências:  $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$ ;
- Furos:  $\frac{6}{60} \times 100 = 10\%$ ;
- Deformações:  $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$ ;
- Riscos:  $\frac{6}{60} \times 100 = 10\%$ ;
- Outros:  $\frac{9}{60} \times 100 = 15\%$ .

Analisando as alternativas, concluímos que 35% dos defeitos detectados (10% + 25%) correspondem a riscos ou manchas.

---

[10] Na figura, a corda  $AB$  tem medida 5 e o raio  $OA$  mede 10.

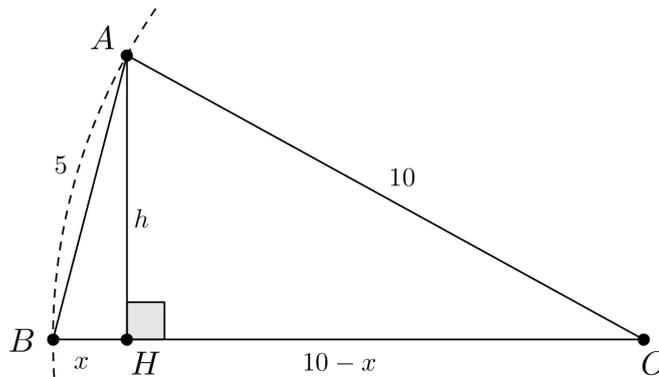


A medida do segmento  $AH$ , perpendicular ao raio  $OB$ , é igual a

- (A)  $\frac{5\sqrt{15}}{4}$     (B) 5    (C)  $5\sqrt{3}$     (D)  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$     (E)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

**Solução**

**Resposta: A**



Chamando de  $x$  a medida do segmento  $BH$ , como na figura acima, temos, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos  $AHB$  e  $AHO$ ,

$$h^2 + x^2 = 5^2 \text{ e } h^2 + (10 - x)^2 = 10^2.$$

Com isso,  $h^2 = 25 - x^2$  e  $h^2 = 100 - (10 - x)^2 = 20x - x^2$ .

Logo  $25 - x^2 = 20x - x^2$  e assim  $x = \frac{5}{4}$ .

Substituindo na equação  $h^2 + x^2 = 5^2$ , temos

$$h^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25,$$

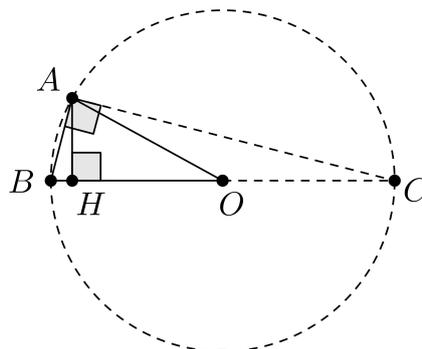
logo

$$h^2 = 25 - \frac{25}{16} = \frac{400}{16} - \frac{25}{16} = \frac{375}{16}.$$

Com isso,

$$\overline{AH} = h = \sqrt{\frac{375}{16}} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

**Outra solução:**



Traçando o diâmetro  $BC$  e a corda  $AC$  da figura, o triângulo  $ABC$  será retângulo em  $A$ , pois o ângulo  $B\hat{A}C$  determina um arco de  $180^\circ$ .

Chamando de  $y$  a medida de  $AC$ , como  $\overline{BC} = 20$  pelo Teorema de Pitágoras,

$$y^2 + 5^2 = 20^2,$$

logo  $y^2 = 375$ , e então  $y = 5\sqrt{15}$ .

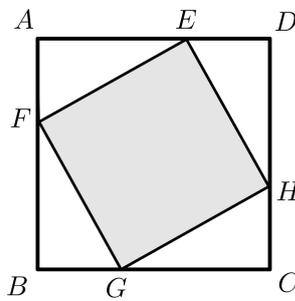
Temos ainda, pela semelhança dos triângulos  $ABH$  e  $ABC$ , que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ , logo

$$5 \cdot 5\sqrt{15} = 20 \cdot \overline{AH}$$

e, com isso

$$\overline{AH} = \frac{25\sqrt{15}}{20} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

[11] Na figura abaixo,  $ABCD$  é um quadrado de lado 1 e  $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE} = x$ . Qual o valor de  $x$  para que o quadrado  $EFGH$  tenha a menor área possível?



- (A)  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$       (B)  $\frac{1}{4}$       (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (D)  $\frac{1}{2}$       (E) 1

**Solução**

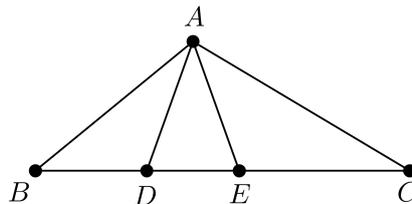
**Resposta: D**

Se  $\ell$  é o comprimento do lado do quadrado  $EFGH$  então, pelo Teorema de Pitágoras, temos que  $\ell^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ .

$$\text{Mas } x^2 - 2x + 1 = 2 \left( x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} = 2 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim o menor valor para  $\ell^2$  ocorre quando  $x - \frac{1}{2} = 0$ , ou seja, para  $x = \frac{1}{2}$ .

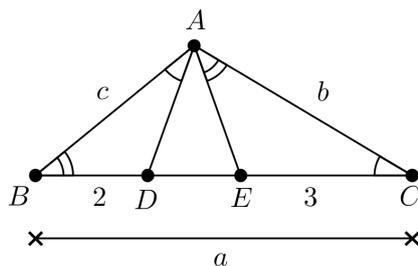
[12] No triângulo  $ABC$  da figura abaixo,  $A\hat{B}C = E\hat{A}C$ ,  $A\hat{C}B = D\hat{A}B$ ,  $\overline{BD} = 2$  e  $\overline{CE} = 3$ .



Com base nas informações acima, podemos afirmar que a razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$  é igual a

- (A)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$       (B)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$       (C)  $\frac{2}{3}$       (D)  $\frac{3}{2}$       (E)  $\frac{4}{9}$

**Solução**  
**Resposta: A**



Denotando  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AB} = c$  e  $\overline{AC} = b$ , queremos determinar  $\frac{c}{b}$ .

Pelos ângulos conhecidos, podemos afirmar que os triângulos  $ABC$  e  $DBA$  são semelhantes e assim

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{c}, \text{ ou seja, } c^2 = 2a.$$

Podemos também afirmar que os triângulos  $ABC$  e  $EAC$  são semelhantes, logo

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{b}, \text{ ou seja, } b^2 = 3a.$$

Com isso,

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}, \text{ portanto } \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

---

[13] Em uma urna há 7 bolas vermelhas, 5 azuis e 4 brancas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual a probabilidade de que tenham sido retiradas uma bola vermelha e uma branca?

- (A)  $\frac{7}{60}$       (B)  $\frac{7}{30}$       (C)  $\frac{23}{120}$       (D)  $\frac{7}{16}$       (E)  $\frac{1}{8}$

**Solução**  
**Resposta: B**

O espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas que tem  $16 \times 15 = 240$  elementos.

Há duas maneiras de retirarmos uma bola vermelha e uma branca, a saber:

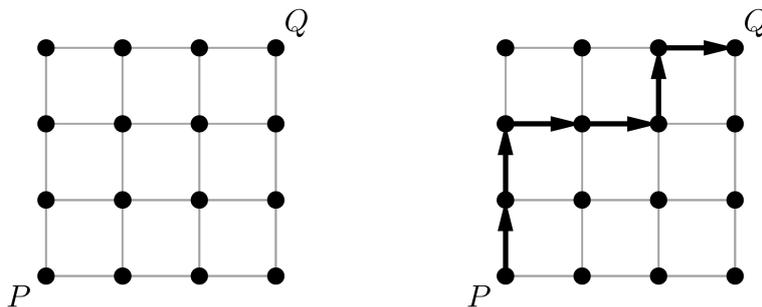
a primeira é vermelha e a segunda é branca, isso pode ser feito de  $7 \times 4 = 28$  modos;

a primeira é branca e a segunda é vermelha, isso pode ser feito de  $4 \times 7 = 28$  modos.

Portanto a probabilidade de que tenham sido retiradas uma branca e uma vermelha é igual a  $\frac{28 + 28}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$ .

---

[14] Um jogo é disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador  $A$  inicia no ponto  $P$  e deve chegar ao ponto  $Q$ , podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador  $B$  inicia no ponto  $Q$  e deve chegar ao ponto  $P$  sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador  $A$ . Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.



Em uma partida já encerrada, o jogador  $A$  percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto  $Q$  em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador  $B$  pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto  $P$  também em 6 jogadas?

- (A) 8      (B) 9      (C) 10      (D) 11      (E) 12

**Solução**

**Resposta: D**

Tomando o ponto  $P$  como sendo  $(0,0)$  e o ponto  $Q$  como  $(3,3)$ , temos que  $R(1,2)$  poderá ser o único ponto de encontro na terceira jogada de  $A$  e de  $B$ , já que a trajetória de  $A$  foi destacada na figura.

Começamos calculando o total de trajetórias possíveis de  $B$  ao fazer o percurso de  $Q$  até  $P$ . Teremos 3 movimentos na vertical e 3 na horizontal, perfazendo um total de  $\frac{6!}{3!3!} = 20$ .

Agora calculamos o total de trajetórias possíveis de  $B$  passando obrigatoriamente por  $R$ .

De  $Q$  a  $R$ :  $\frac{3!}{2!1!} = 3$  e, de  $R$  a  $P$ :  $\frac{3!}{2!1!} = 3$ ; ou seja, passando por  $R$  teremos um total de 9 trajetórias.

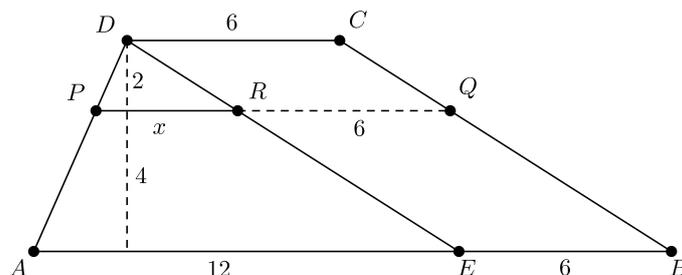
Logo a resposta é  $20 - 9 = 11$ .

[15] As medidas das bases  $AB$  e  $CD$  de um trapézio  $ABCD$  são, respectivamente, 18 e 6. Uma reta paralela às bases intersecta os lados  $AD$  e  $BC$  nos pontos  $P$  e  $Q$ . Sabendo que a distância desta paralela a  $CD$  é 2 e a distância a  $AB$  é 4, a medida do segmento  $PQ$  é:

- (A) 16      (B) 14      (C) 10      (D) 9      (E) 6

**Solução**

**Resposta: C**

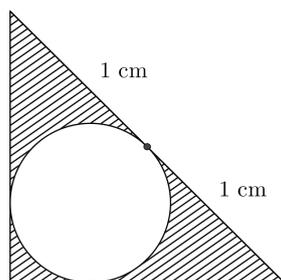


Traçando o segmento  $DE$ , paralelo ao lado  $BC$ , como na figura acima, os triângulos  $ADE$  e  $PDR$  serão semelhantes, pois  $PQ$  é paralelo a  $AB$ . Com isso, sendo  $x = \overline{PR}$ , como as alturas dos triângulos  $ADE$  e  $PDR$  são 2 e 6, respectivamente, temos

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{6},$$

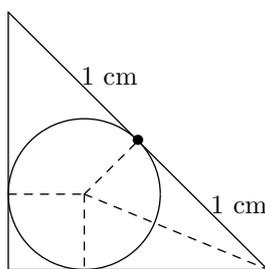
logo  $x = 4$ . Assim,  $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} = x + 6 = 10$ .

[16] Inscreve-se uma circunferência em um triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos que medem, cada um, 1 cm. Qual é a área, em  $\text{cm}^2$ , da região sombreada, interna ao triângulo e externa à circunferência?



- (A)  $2 + \pi(\sqrt{3} - 2)$       (B)  $1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$       (C)  $2 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$   
 (D)  $1 + \pi(1 - 2\sqrt{3})$       (E)  $1 + \pi(\sqrt{3} - 3)$

**Solução**  
**Resposta: B**



Seja  $r$  o raio da circunferência inscrita. Como o triângulo é retângulo, cada cateto mede  $(1 + r)$  cm.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que  $(1 + r)^2 + (1 + r)^2 = 2^2 = 4$ , donde  $(1 + r)^2 = 2$ . Assim, a área do triângulo mede

$$\frac{(r + 1)(r + 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}^2$$

Resolvendo a equação  $(1 + r)^2 = 2$ , encontramos  $r = \sqrt{2} - 1$  cm e assim a área do círculo é  $\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2})$   $\text{cm}^2$ .

Portanto a área da região sombreada é  $1 - \pi(3 - 2\sqrt{2}) = 1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$   $\text{cm}^2$ .

[17] Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Com a solução  $(1, 0)$  do sistema acima construímos o segundo sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

cuja solução  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  é usada para formar o terceiro sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Prosseguindo desse modo, qual é a solução do décimo sistema?

- (A)  $\left(1, \frac{1}{32}\right)$       (B)  $\left(\frac{1}{32}, 0\right)$       (C)  $(1, 1)$       (D)  $\left(1, -\frac{1}{32}\right)$       (E)  $\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$

**Solução**

**Resposta: E**

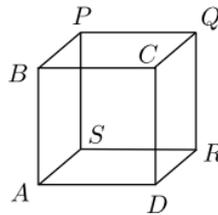
Observando que a solução do sistema  $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = a \end{cases}$  é  $(a, 0)$  e a solução dos sistema  $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 0 \end{cases}$  é  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ,  
concluimos que as soluções dos sistemas são:

$$(1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{16}, 0\right), \left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$$

Portanto, a resposta é  $\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$ .

---

[18] A seguinte figura mostra um cubo.



O número de triângulos equiláteros que podem ser formados cujos vértices coincidam com os do cubo é:

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 12      (E) 24

**Solução**

**Resposta: C**

Os vértices do cubo podem ser ligados de três maneiras: por uma aresta do cubo, por uma diagonal da face, por uma diagonal interna do cubo. Dessas três, a única maneira de formarmos um triângulo equilátero é com as diagonais das faces.

Note que de cada vértice é possível formar três triângulos distintos, por exemplo, com o vértice A formamos os triângulos ACP, ACR e APR. Sendo assim, com os 8 vértices do cubo teremos um total de 24 triângulos equiláteros. No entanto cada um dos triângulos foi contado três vezes, por cada vértice de cada triângulo, logo teremos 8 triângulos equiláteros distintos.

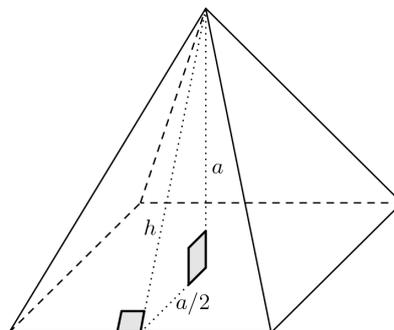
---

[19] As quatro faces triangulares de uma pirâmide de base quadrada são congruentes, e a altura desta pirâmide é igual à medida das arestas da base. A razão entre a área lateral total e a área da base é:

- (A) 2      (B)  $\sqrt{5}$       (C)  $\sqrt{3}$       (D)  $\sqrt{2}$       (E) 1

**Solução**

**Resposta: B**



Na figura, está representado o triângulo retângulo formado pela altura da pirâmide, pelo apótema da base e pela altura de uma das faces (também chamado de apótema da pirâmide). Sendo  $a$  a medida das arestas da base (o lado do quadrado) e  $h$  a altura de uma das faces laterais, o triângulo representado tem hipotenusa  $h$  e catetos  $a$  e  $a/2$ .

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A área  $S_\ell$  de cada face lateral é dada por  $S_\ell = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$ ,

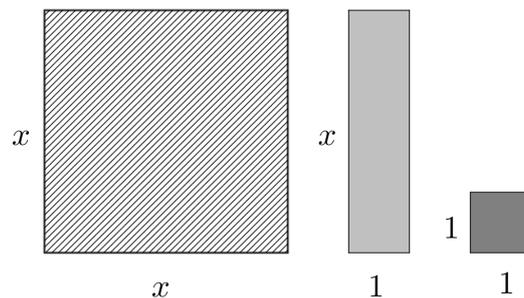
portanto, a área lateral total da pirâmide é

$$4S_\ell = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{4} = a^2\sqrt{5}.$$

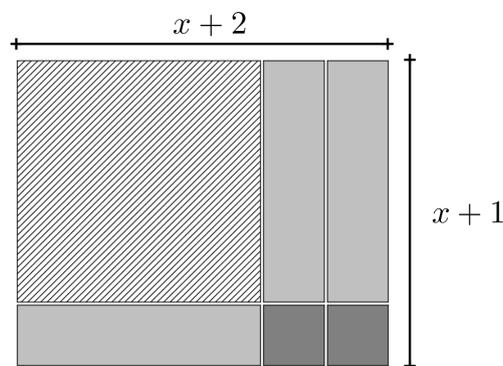
Por outro lado, a área  $S_b$  da base é dada por  $a^2$ . Sendo assim, a razão  $\frac{4S_\ell}{S_b}$  é igual a

$$\frac{4S_\ell}{S_b} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}.$$

[20] O *Algeplan* é um material manipulativo utilizado como ferramenta no ensino de polinômios. Em sua versão mais simples, ele consiste em 3 tipos de peças (conforme figura abaixo) que representam os monômios e a unidade. Um quadrado grande de área  $x^2$ , um retângulo de área  $x$  e um quadrado pequeno de área 1.



Usando essas peças, sem sobreposição, é possível montar retângulos maiores cujas áreas podem ser calculadas de duas formas: pela soma das áreas das peças que compõem a figura e pelo produto da base pela altura, obtendo assim a fatoração, conforme o exemplo a seguir.



$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Determine qual dos polinômios abaixo **não** é possível ser representado por um retângulo usando somente as peças do *Algeplan*.

- (A)  $x^2 + 5x + 6$       (B)  $3x^2 + 8x + 4$       (C)  $2x^2 + 4x + 2$   
 (D)  $x^2 + 6x + 9$       (E)  $2x^2 + 5x + 4$

**Solução**

**Resposta:** E

O item (E) é o único polinômio que não pode ser fatorado como produto de monômios com coeficientes inteiros positivos. De fato, as raízes da equação correspondente são complexas.

- (A)  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ .  
 (B)  $3x^2 + 8x + 4 = (3x + 2)(x + 2)$ .  
 (C)  $2x^2 + 4x + 2 = (2x + 2)(x + 1)$ .  
 (D)  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$ .  
 (E)  $2x^2 + 5x + 4 = (2x + 1)(x + 2) + 2$ .

[21] Numa liquidação, uma camisa sofreu um desconto de 10%, no mês seguinte, outro desconto de 10% e, no terceiro mês, mais um desconto de 10%. Qual foi o desconto total?

- (A) 27,10%      (B) 27,70%      (C) 27,90%      (D) 30%      (E) 30,10%

**Solução**

**Resposta: A**

Podemos pensar no preço inicial da camisa sendo  $x$  reais. No primeiro mês passou para  $x \cdot \frac{90}{100} = 0,9x$  (desconto de 10%), no segundo para  $0,9x \cdot \frac{90}{100} = 0,81x$  e no terceiro  $0,81x \cdot \frac{90}{100} = 0,729x$ .

Portanto, o desconto total é igual a  $x - 0,729x = 0,271x$ , que corresponde a um percentual de 27,10%.

[22] A equação de estado de um gás ideal é

$$PV = nRT,$$

onde  $P$  é a pressão em Pascal,  $V$  é o volume ocupado pelo gás em metros cúbicos,  $n$  é o número de mols da amostra gasosa,  $R$  é a constante universal dos gases perfeitos e  $T$  é a temperatura em Kelvin. Supondo que para uma certa amostra o número de mols se mantenha constante, é correto afirmar que:

- (A) quanto maior o volume ocupado, maior a pressão.  
(B)  $n$  e  $T$  são proporcionais.  
(C)  $\frac{T}{P}$  é inversamente proporcional a  $V$ .  
(D)  $nR$  é proporcional a  $T$ .  
(E)  $P$  e  $\frac{V}{T}$  são inversamente proporcionais.

**Solução**

**Resposta: E**

$P$  é proporcional ao inverso de  $\frac{V}{T}$ , pois  $P = nR \cdot \frac{T}{V}$  com  $nR$  constante.

Portanto são grandezas inversamente proporcionais.

[23] João deseja comprar uma determinada calça. Para isto, decide observar os valores e promoções do produto em duas lojas diferentes. Na loja A a calça custa 140 reais, mas, se comprada à vista, João ganharia 15% de desconto. Na loja B a mesma calça custa 150 reais. Como promoção de aniversário da empresa, a loja B tem uma urna que contém 5 bolas, onde estão escritos os seguintes descontos: 5%, 10%, 15%, 20% e 25%. Ao realizar a compra, o cliente deve sortear desta urna duas bolas com reposição. Após o sorteio, o cliente recebe a soma dos dois descontos sobre o valor da peça adquirida.

Qual a probabilidade de João pagar menos, comprando na loja B em vez de comprar na loja A?

- (A) 64%      (B) 76%      (C) 80%      (D) 88%      (E) 95%

**Solução**

**Resposta: B**

Realizando a compra da calça na loja A, o preço final será de 119 reais. Para que o custo da mesma calça seja inferior comprando na loja B é preciso que o desconto seja maior que 20%, pois se o desconto for de 20%, então o preço final seria de 120 reais.

Sendo o sorteio com reposição, temos um total de 25 possibilidades. Analisando os valores dos descontos e atentos ao fato de que há reposição, temos 6 possibilidades em que o desconto é menor ou igual a 20%: 5% mais 5%, 5% mais 10%, 10% mais 5%, 5% mais 15% e 15% mais 5%.

Logo percebemos que 19 possibilidades implicam em um desconto superior a 20%.

Portanto a probabilidade é igual a  $\frac{19}{25} = 76\%$ .

[24] A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos, em ordem inversa é 54. Sabendo que a soma dos algarismos é igual a 12, podemos afirmar que a soma dos seus quadrados é igual a

- (A) 72      (B) 74      (C) 80      (D) 90      (E) 112

**Solução**

**Resposta: D**

Vamos representar o número na forma  $AB = 10A + B$ , onde  $A$  e  $B$  são algarismos de 0 a 9 e  $A \geq B$ . Assim temos que  $AB - BA = 54$  e  $A + B = 12$ .

$$\begin{aligned} 10A + B - (10B + A) &= 54 \\ 9A - 9B &= 54 \\ A - B &= 6 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A + B = 12 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

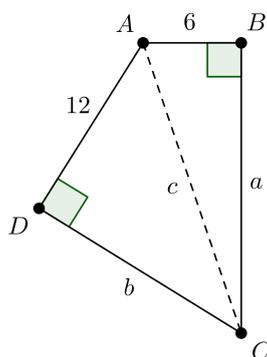
Chegamos a  $A = 9$  e  $B = 3$ , e então  $9^2 + 3^2 = 90$ .

[25] No quadrilátero  $ABCD$ , os ângulos internos  $\hat{B}$  e  $\hat{D}$  são retos. Sendo  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CD} = b$  e  $\overline{AD} = 12$ , o valor de  $\sqrt{a^2 - b^2}$  é

- (A)  $6\sqrt{3}$       (B)  $6\sqrt{5}$       (C) 3      (D)  $8\sqrt{3}$       (E) 6

**Solução**

**Resposta: A**



Se chamarmos de  $c$  a medida da diagonal  $AC$ , teremos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$6^2 + a^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = c^2.$$

Assim,  $6^2 + a^2 = 12^2 + b^2$ , logo  $a^2 - b^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$ .

Com isso,  $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ .

[26] Dois números reais são tais que a *média aritmética* entre eles é 25 e a *média geométrica* é 20. Quais são esses números?

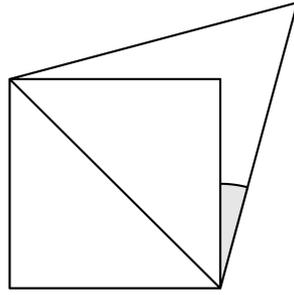
- (A) 10 e 30      (B) 20 e 30      (C) 10 e 40      (D) 15 e 35      (E) 5 e 45

**Solução**

**Resposta: C**

Chamando de  $x$  e de  $y$  os números procurados, temos que  $\frac{x+y}{2} = 25$  e  $\sqrt{xy} = 20$ , onde se usou a definição de média aritmética e geométrica entre dois números, respectivamente. Assim,  $x + y = 50$  e  $xy = 400$ . Isolando  $y$  na primeira e substituindo na segunda igualdade obtém-se a equação de segundo grau  $-x^2 + 50x - 400 = 0$  cujas raízes são  $x = 10$  e  $x = 40$  e substituindo  $x = 10$  em uma das equações obtém-se  $y = 40$ . Se  $x = 40$  obtém-se  $y = 10$ .

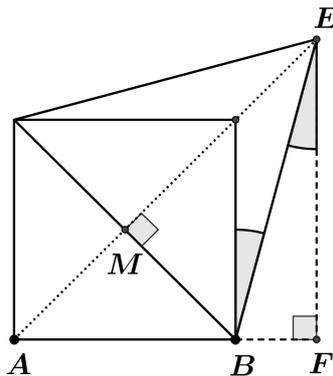
[27] Na figura abaixo, tem-se um quadrado e um triângulo equilátero, coplanares. Qual o seno do ângulo destacado?



- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$       (C)  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$       (D)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$       (E)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

**Solução**

**Resposta: C**



Seja  $\ell$  a medida do lado do quadrado e  $\alpha$  a medida do ângulo cujo seno queremos obter. Na figura acima, como  $EF$  é paralelo aos lados verticais do quadrado, temos que  $\widehat{BEF} = \alpha$ . Além disso,  $AM$  é metade da diagonal do quadrado, logo  $\overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ .

O lado do triângulo equilátero terá medida igual à da diagonal do quadrado, ou seja  $\ell\sqrt{2}$ . Com isso, a altura  $EM$  deste triângulo terá medida

$$\overline{EM} = (\ell\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}.$$

Assim,

$$\overline{AE} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} + \frac{\ell\sqrt{6}}{2} = \frac{\ell(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2}.$$

Como  $\widehat{FAE} = 45^\circ$ , temos

$$\overline{AF} = \overline{AE} \cdot \cos 45^\circ = \frac{\ell\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell(1 + \sqrt{3})}{2}.$$

Logo

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \frac{\ell(1 + \sqrt{3})}{2} - \ell = \frac{\ell(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Com isso,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\ell(\sqrt{3} - 1)}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

**Outra solução:**

O ângulo  $\alpha$  cujo seno queremos é a diferença entre um ângulo interno do triângulo equilátero ( $60^\circ$ ) e o ângulo entre o lado do quadrado e sua diagonal ( $90^\circ/2 = 45^\circ$ ). Assim,

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ) \cos(45^\circ) - \operatorname{sen}(45^\circ) \cos(60^\circ) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

[28] Em um determinado momento, o preço da gasolina pura na refinaria era de R\$ 1,60 por litro e o preço do álcool anidro na usina era de R\$ 1,20 por litro. Sabe-se que a gasolina vendida nos postos contém 75% de gasolina pura e 25% de álcool anidro e que o preço dessa mistura corresponde a 40% do preço de venda da gasolina nos postos. O preço pago pelo consumidor por litro de gasolina nos postos é

- (A) R\$ 3,37                      (B) R\$ 3,42                      (C) R\$ 3,49                      (D) R\$ 3,62                      (E) R\$ 3,75

**Solução**

**Resposta: E**

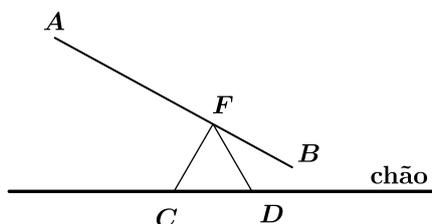
O preço da gasolina na refinaria, sem impostos, é

$$\text{R\$ } 1,60 \times 0,75 + \text{R\$ } 1,20 \times 0,25 = \text{R\$ } 1,50.$$

Visto que o preço na refinaria compõe 40% do preço final, o preço final é

$$\text{R\$ } 1,50 \times \frac{100}{40} = \text{R\$ } 3,75.$$

[29] A figura esquematiza o perfil de uma máquina simples, conhecida como *alavanca*. O triângulo equilátero  $CDF$  do esquema tem lados de medida  $\sqrt{3}$  metros, estando o lado  $CD$  em contato com o chão horizontal. O segmento  $AB$  representa uma haste rígida e retilínea, de comprimento 6 metros, que gira em torno do ponto fixo  $F$ , sendo  $\overline{BF} = 2$  m.



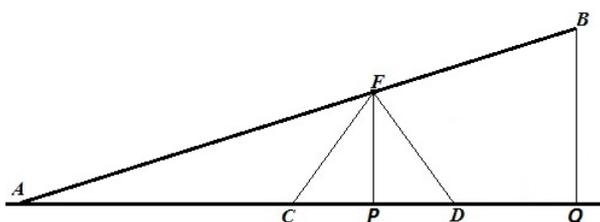
Quando  $A$  tocar o chão, a altura de  $B$ , em metros, em relação ao chão será

- (A) 1                      (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $\sqrt{2}$                       (D)  $\frac{9}{4}$                       (E)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**Solução**

**Resposta: D**

A figura abaixo mostra a situação do problema, onde  $P$  e  $Q$  são, respectivamente, as projeções de  $F$  e  $B$  sobre o chão horizontal.



Como todos os pontos são coplanares, inclusive  $P$  e  $Q$ , então  $FP$  é altura do triângulo equilátero  $CDF$ . Sendo  $\ell = \sqrt{3}$  metros o lado desse triângulo, então:

$$\overline{FP} = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m} = \frac{3}{2} \text{ m}.$$

Como  $\widehat{APF} = \widehat{AQB} = 90^\circ$  e  $\widehat{PAF} = \widehat{QAB}$  (ângulo comum), então os triângulos  $AFP$  e  $ABQ$  são semelhantes pelo critério *ângulo-ângulo*. Disso e sabendo-se que  $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = 4$  metros, tem-se:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{4},$$

donde conclui-se que a altura do ponto  $B$  em relação ao chão é  $\overline{BQ} = \frac{9}{4}$  m.

[30] Francisco escreveu todos os números de 144 até 2017. Quantas vezes ele escreveu o dígito 5?

- (A) 188      (B) 288      (C) 388      (D) 478      (E) 578

**Solução**

**Resposta: E**

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

Os números terminados em 5 ocorrem de dez em dez a partir de 145 e são 145, 155, ... 2015. Com isso temos  $201 - 13 = 188$  números terminados em 5.

Os números que têm o algarismo 5 na casa das dezenas de 144 a 2017 são  $19 \times 10 = 190$ , pois antes do 5 podem ser colocados os inteiros 1, 2, ..., 19 e depois do 5, os inteiros 0, 1, ..., 9.

Temos 200 números que têm o algarismo 5 na casa das centenas que são os números de 500 a 599 e de 1500 a 1599.

Portanto ele escreveu  $188 + 190 + 200 = 578$  vezes o algarismo 5.

**Outra Solução:**

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

- Números com o algarismo das unidades igual a 5 são: 145, 155, 165, ..., 2015.
- Números com o algarismo das dezenas igual a 5 são: 150, 151, 152, ..., 1958, 1959.
- Números com o algarismo das centenas igual a 5 são: 500, 501, 502, ..., 1598, 1599.

Na primeira lista, temos  $201 - 13 = 188$  números, na segunda  $10 \times 19 = 190$  e na terceira 200. Portanto a resposta é  $188 + 190 + 200 = 578$ .

**Mais uma solução:**

1) Calculemos de 1 até 2017 :

Como algarismos das unidades : temos 202 possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 201.

Como algarismos das dezenas : temos  $20 \times 10 = 200$  possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 19 e, depois do 5, os naturais de 0 a 9.

Como algarismos das centenas : temos  $2 \times 100 = 200$  possibilidades, pois antes do cinco colocamos os naturais de 0 a 1 e, depois de 00 a 99. Totalizando : 602.

2) calculemos de 1 até 144 : usando a mesma ideia temos um total de 24.

Portanto a resposta é  $602 - 24 = 578$ .