# EXAME DE ACESSO PROFMAT - 2015 - SOLUÇÕES

1. Se $x$ é um número real tal que $x + \dfrac{1}{x} = 3$, então $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ é igual a:

   (A) 6 (B) 7 (C) 8
   (D) 9 (E) 12

   **Resposta: B)**

   **Uma solução:**

   Elevando ambos os membros da equação $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ao quadrado temos que:

   $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 3^2$ e assim segue que $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 9$.

   Portanto $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$.

2. Quantos valores inteiros existem para o número $k$ de forma que a equação $x^2 - 3x + k = 0$ tenha duas raízes reais de sinais contrários e $x^2 + kx + 1 = 0$ não tenha raízes reais?

   (A) 0 (B) 1 (C) 2
   (D) 3 (E) 4

   **Resposta: B)**

   **Uma solução:**

   A equação $x^2 - 3x + k = 0$ terá raízes com sinais contrários quando $k < 0$.

   Por outro lado, para que $x^2 + kx + 1 = 0$ não tenha raízes reais, devemos ter

   $k^2 - 4(1)(1) = \Delta < 0$, logo $k^2 < 4$, que nos dá $-2 < k < 2$.

   Como $k < 0$ e $-2 < k < 2$, temos $-2 < k < 0$, logo, o único valor inteiro possível para $k$ é $-1$.

3. Se $a$ e $b$ são números reais positivos distintos, $A = \dfrac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ e $H = \dfrac{2ab}{a+b}$, então é correto afirmar que:

   (A) $A > G > H$ (B) $A > H > G$ (C) $G > H > A$
   (D) $H > A > G$ (E) $H > G > A$

   **Resposta: A)**

   **Uma solução:**

   Se $a$ e $b$ são números reais distintos, então $(a-b)^2 > 0$.

   Assim segue que $(a-b)^2 + 4ab > 4ab$, que é equivalente a $(a+b)^2 > 4ab$.

   Se $a$ e $b$ são positivos, podemos extrair a raiz quadrada e temos $a + b > 2\sqrt{ab}$.

   Logo $A > G$.

   Se multiplicarmos a expressão $a + b > 2\sqrt{ab}$ por $\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$, segue que $G > H$.

   Portanto $A > G > H$.

4. Qual dos números abaixo é o maior?

(A) $2^{349}$ (B) $4^{175}$ (C) $8^{117}$
(D) $16^{87}$ (E) $32^{70}$

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

Para resolver essa questão usaremos a seguinte propriedade da potenciação:

Se $a, b$ e $c$ são inteiros positivos, então $(a^b)^c = a^{bc}$.

$4^{175} = (2^2)^{175} = 2^{2\cdot 175} = 2^{350}$.

$8^{117} = (2^3)^{117} = 2^{3\cdot 117} = 2^{351}$.

$16^{87} = (2^4)^{87} = 2^{4\cdot 87} = 2^{348}$.

$32^{70} = (2^5)^{70} = 2^{5\cdot 70} = 2^{350}$.

Com isso o maior dos números é $8^{117}$.

5. A água do mar contém 2,5% do seu peso em sal. Quantos quilogramas de água do mar são necessários para obtermos 200 gramas de sal?

(A) 5 (B) 6 (C) 8
(D) 9 (E) 10

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

Se $Q$ é a quantidade, em quilogramas, de água do mar para obtermos 200 gramas de sal, então 2,5% de $Q$ deve dar 0,2 quilos, ou seja, $\frac{2,5}{100}Q = 0,2$ e assim $Q = \frac{20}{2,5} = 8$.

6. Um hexágono regular e um triângulo equilátero tem áreas iguais. Qual é a razão entre o comprimento do lado do triângulo e o comprimento do lado do hexágono?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2
(D) $\sqrt{6}$ (E) 6

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

Consideremos $a$ o lado do hexágono regular, e $b$ o lado do triângulo equilátero.

Sendo as áreas iguais, temos que $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, logo $\frac{b^2}{a^2} = 6$.

Portanto $\frac{b}{a} = \sqrt{6}$.

7. Duas lojas A e B ofereceram descontos para uma mesma mercadoria. A loja A ofereceu 15% e no mês seguinte outro desconto de 20%, enquanto a loja B fez o inverso, ofereceu 20% e no mês seguinte outro desconto de 15%. Depois de ocorridos os dois descontos, é correto afirmar que o desconto percentual total:
(A) em ambas as lojas foi de 35%.
(B) na loja A foi maior que na loja B.
(C) na loja B foi maior que na loja A.
(D) em ambas as lojas foi de 32%.
(E) em ambas as lojas foi de 33,5%.

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

Se $x$ é o valor da mercadoria, então aplicando um desconto de 20%, passará a valer $0,80x$ e aplicando outro desconto de 15% passará a valer $0,85(0,80x) = 0,68x$, logo, independente da ordem dos descontos, o desconto percentual total foi de 32%.

8. Analise as sentenças abaixo:
I. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, se $ab = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$, então $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = 1$.
II. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, se $\dfrac{a}{b} < \dfrac{b}{a}$, então $\dfrac{ac}{b} < \dfrac{bc}{a}$.
III. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, se o valor de $a$ é 30% do valor de $c$ e o valor de $b$ é 120% de $c$, então o valor de $a$ é 25% de $b$.
Das afirmações acima,
(A) apenas I e II são verdadeiras.
(B) apenas I e III são verdadeiras.
(C) apenas II e III são verdadeiras.
(D) apenas III é verdadeira.
(E) todas são falsas.

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

Analisaremos cada uma das sentenças:

I. Falsa.

Temos $ab = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2} \Leftrightarrow 2ab + a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \pm 1$.

Escolhendo, por exemplo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$, temos $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = -1$.

II. Falsa.

Basta tomar $c < 0$.

III. Verdadeira.

De fato, se $a = \dfrac{30}{100}c$ e $b = \dfrac{120}{100}c$, então $a = \dfrac{30}{100} \cdot \dfrac{100}{120}b = \dfrac{30}{120}b$
e assim $a = 0,25b$, ou seja, $a$ é 25% de $b$.

9. Uma escola de educação básica possui 12 professores de matemática, sendo que 8 atuam exclusivamente no Ensino Fundamental e 4 atuam exclusivamente no Ensino Médio. Para a organização da 1ª Olimpíada de Matemática da escola, será formada uma comissão de 5 professores de matemática, de modo que pelo menos um deles seja professor do Ensino Médio. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada?

   (A) 112 (B) 336 (C) 344
   (D) 456 (E) 736

   **Resposta: E)**

   **Uma solução:**

   Compreendendo que a comissão será formada com a escolha de 5 professores dentre os 12, excetuando-se as possibilidades de comissões compostas exclusivamente por professores do Ensino Fundamental, temos que:

   $C_{12,5} - C_{8,5} = 792 - 56 = 736.$

   Desse modo há 736 maneiras de formar a comissão.

10. As medidas dos três ângulos, em graus, de um triângulo são proporcionais a 4, 7 e 9. Então a soma da medida do menor ângulo com a medida do maior ângulo, em graus, é igual a:

   (A) 13 (B) 99 (C) 117
   (D) 144 (E) 180

   **Resposta: C)**

   **Uma solução:**

   Indicando por $\alpha, \beta$ e $\gamma$ as medidas dos ângulos do triângulo, em graus, temos que $\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{\beta}{7} = \dfrac{\gamma}{9} = t$, onde $\alpha + \beta + \gamma = 180$.

   Segue que $4t + 7t + 9t = 180$, $t = 9$, o menor ângulo $\alpha = 36$ e o maior $\gamma = 81$.

   Portanto $\alpha + \gamma = 117$.

11. O Tungstênio é um elemento químico de símbolo W e número atômico 74. Na forma pura é um metal de cor branco-cinza cujo ponto de fusão é igual a 3422 °C. Por causa do seu alto ponto de fusão, o Tungstênio é largamente usado na indústria na produção de filamentos para lâmpadas elétricas incadescentes. Sabendo que pontos de fusão e ebulição da água em graus Celsius (°C) e em graus Fahrenheit (°F) são dados pela tabela abaixo

| | °C | °F |
|---|---|---|
| Fusão | 0 | 32 |
| Ebulição | 100 | 212 |

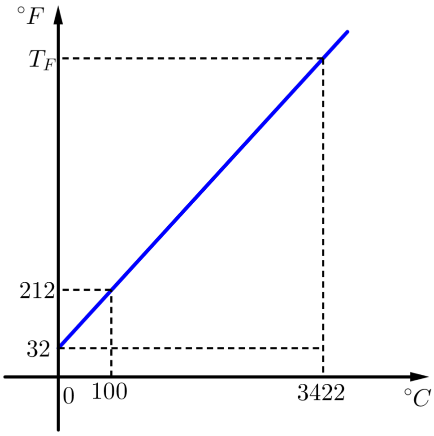
   e que as temperaturas nas duas escalas, graus Celsius e graus Fahrenheit, se relacionam por meio de uma função afim, qual é o ponto de fusão do Tungstênio em graus Fahrenheit?

(A) $6159,6$ (B) $6175,6$ (C) $6191,6$
(D) $6232,6$ (E) $6254,6$

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

Observe o gráfico abaixo:




Denotando por $T_F$ a temperatura de fusão do Tungstênio em graus Fahrenheit, temos que $\dfrac{212-32}{100} = \dfrac{T_F - 32}{3422}$.

Portanto $T_F = 32 + \dfrac{180}{100} \times 3422 = 6191,6°F$.

12. Representando por $\min(a;b)$ o menor dos números reais $a$ e $b$, o conjunto solução da inequação $\min(x+3;1-x) < 1$ é dado por:

(A) $(-2,0)$ (B) $(-2,-1)$
(C) $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ (D) $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$
(E) $\emptyset$

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

Suponha $x+3 \geq 1-x$, o que ocorre quando $x \geq -1$. Neste caso, temos $\min(x+3;1-x) = 1-x < 1$, logo $x > 0$. Assim, teremos $x \geq -1$ e $x > 0$. A interseção das soluções destas desigualdades é $x > 0$.

Suponha agora $x+3 < 1-x$, que equivale a $x < -1$. Neste caso, $\min(x+3;1-x) = x+3 < 1$, logo $x < -2$. Daí, temos $x < -1$ e $x < -2$, cuja interseção é $x < -2$.

Portanto, a desigualdade se verifica quando $x < -2$ ou $x > 0$.

13. Uma pedra é atirada para cima e sua altura $h$, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que $t$ é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante $t = 2$, pode-se afirmar que o valor de $a$ é:

(A) $-3$ (B) $-2$ (C) $2$
(D) $3$ (E) $-4$

**Resposta: A)**

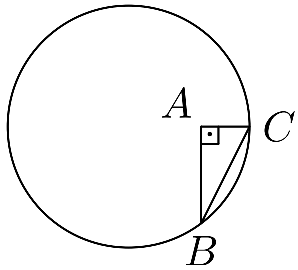
**Uma solução:**

A função que representa a altura da pedra é dada por $h(t) = at^2 + 12t + 0$.

Logo o valor da variável $t$ que determina a altura máxima é dado por $t_{\max} = -\dfrac{12}{2a} = -\dfrac{6}{a}$.

Mas, pelos dados do enunciado, segue que $-\dfrac{6}{a} = 2$ e, portanto $a = -3$.

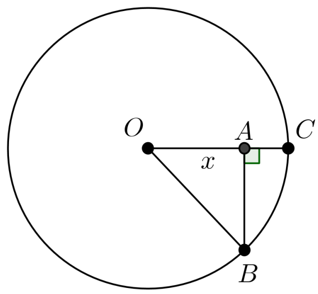
14. Na figura abaixo, o segmento $AC$ está contido em um diâmetro da circunferência. Sabendo que $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, qual é o raio da circunferência?




(A) $13/4$ (B) $13/2$ (C) $\sqrt{13}/2$
(D) $\sqrt{13}$ (E) $5/4$

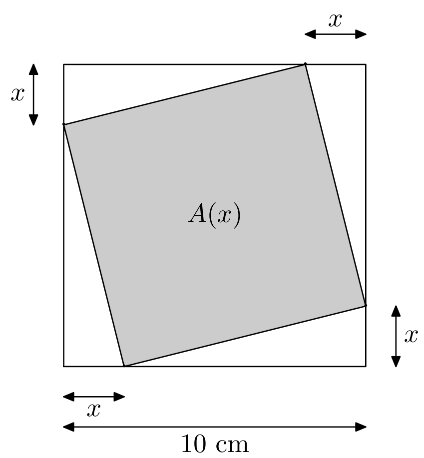
**Resposta: A)**

**Uma solução:**




Sejam $O$ o centro da circunferência, $r$ o raio e $x = \overline{OA}$. Como $OC$ é um raio, temos $r = x + 2$. Como $OB$ é também um raio, temos $\overline{OB} = r = x + 2$ e, como o triângulo $OAB$ é retângulo em $A$, temos $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$, logo $(x+2)^2 = x^2 + 3^2$, de onde vem que $x = \dfrac{5}{4}$ e $r = \dfrac{13}{4}$.

15. Em um quadrado cujo lado mede 10 cm, está inscrito um outro quadrado de área $A(x)$, conforme a figura. O valor mínimo de $A(x)$ será:




(A) 5 cm$^2$ (B) 12,5 cm$^2$ (C) 20 cm$^2$
(D) 25 cm$^2$ (E) 50 cm$^2$

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

A área $A(x)$ corresponde ao quadrado da medida da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos $x$ e $(10 - x)$, observado na figura. Calculando, através do Teorema de Pitágoras, obtem-se a medida da hipotenusa: $\sqrt{2x^2 - 20x + 100}$.

Desse modo, temos: $A(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

Calculando o valor mínimo da função quadrática obtida, encontraremos a área mínima $A(x)$: $\min\{A(x)\} = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-((-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 100)}{4 \cdot 2} = \dfrac{400}{8} = 50$

16. Um restaurante vende suco e refresco de uva, que são preparados misturando um concentrado com água, na razão de 1 para 2, no caso do suco, e de 1 para 5, no caso do refresco. Para preparar 6 litros de refresco, a que volume de suco devemos acrescentar água?

(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

**Resposta: B)**

**Uma solução:**

Seja $q$ a quantidade, em litros, de volume ao qual iremos acrescentar água para obter 6 litros de refresco.

Misturando $q$ litros de suco com $6 - q$ litros de água, obtemos 6 litros de refresco. Com isso, a quantidade de concentrado no refresco, $\dfrac{1}{6} \cdot 6 = 1$ litro, é igual à quantidade de concentrado no suco, $\dfrac{1}{3}q$. Portanto $\dfrac{1}{3}q = 1$, ou seja, $q = 3$.

17. As notas obtidas por cinco alunos em uma determinada prova indicam que a mediana é 6, a moda é 8 e a média aritmética é 6. Acrescentando-se à amostra a nota de um sexto aluno, que fez segunda chamada da prova, a mediana aumenta para 6,5. Nessas condições, a média aritmética das notas aumentou para

(A) 6 (B) 37/6 (C) 41/6
(D) 7 (E) 43/6

**Resposta: B)**

**Uma solução:**

A amostra inicial tem 5 elementos, portanto, organizando as notas em uma lista crescente, a mediana é o valor do terceiro elemento. Além disso, como a moda é 8, a série de notas é $\{n_1,\ n_2,\ 6,\ 8,\ 8\}$.

Como a média aritmética das notas é 6, temos $\frac{n_1+n_2+6+8+8}{5} = 6$, logo, $n_1+n_2+6+8+8 = 30$.

A nota $N$ obtida pelo aluno que fez segunda chamada fez a mediana aumentar. Portanto, a nota desse aluno está acima da mediana original.

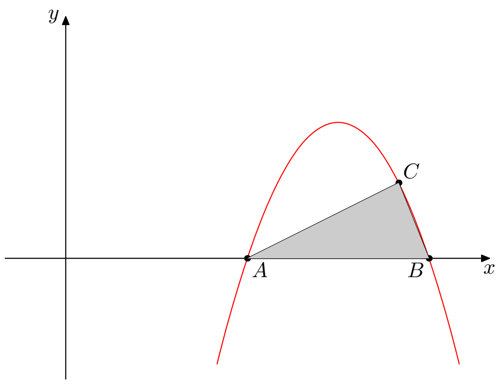
Se essa nota fosse maior ou igual a 8, teríamos a série $\{n_1,\ n_2,\ 6,\ 8,\ 8,\ N\}$, e então a nova mediana seria $\frac{6+8}{2} = 7$, contradizendo os dados do problema. Logo, $N$ está entre 6 e 8, e então a série do notas é $\{n_1,\ n_2,\ 6,\ N,\ 8,\ 8\}$.

A mediana é então dada por $6,5 = \frac{6+N}{2}$, logo, $N = 7$.

A nova média aritmética será, portanto,

$$\frac{n_1+n_2+6+N+8+8}{6} = \frac{\overbrace{n_1+n_2+6+8+8}^{30}+N}{6} = \frac{30+7}{6} = \frac{37}{6}.$$

18. A função quadrática $y = -x^2+9x-18$ está representada no gráfico abaixo. Sobre o gráfico selecionaram-se os pontos A e B, no eixo dos $x$, e um ponto C, cuja abscissa vale 5,5.



A área do triângulo ABC é igual a:

(A) 1,25 (B) 1,875 (C) 2,25
(D) 3,375 (E) 3,75

**Resposta: B)**

**Uma solução:**

Para determinar a base do triângulo basta calcular as raízes da equação. Sabendo que as raízes são 3 e 6, temos que a base do triângulo tem tamanho igual a 3.

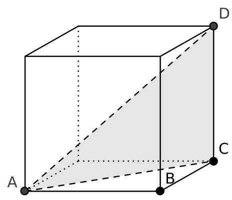
Para determinar a altura, basta determinar o valor da função para $x = 5,5$:

$$y = -(5,5)^2 + 9 \cdot (5,5) - 18 = 1,25.$$

Portanto a área do triângulo é igual a

$$A = \frac{3 \cdot (1,25)}{2} = 1,875.$$

19. No cubo da figura, a área do triângulo $ACD$ é igual a 16, sendo $AD$ uma diagonal do cubo. O comprimento das arestas deste cubo é:




(A) $4\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt[4]{2}$ (C) $2\sqrt[4]{2}$
(D) $4\sqrt{2}/\sqrt[4]{3}$ (E) $4/\sqrt[4]{3}$

**Resposta: B)**

**Uma solução:**

Sejam $x$ a medida das arestas do cubo e $y$ a medida da hipotenusa do triângulo $ABC$.

Como o triângulo $ABC$ é retângulo em B segue, pelo Teorema de Pitágoras, que $y^2 = 2x^2$.

Por outro lado, o triângulo $ACD$ também é retângulo em $C$ e, com isso, tem área igual a $\dfrac{xy}{2} = 16$.

Igualando as duas expressões obtém-se $x = 4\sqrt[4]{2}$.

20. Considere a equação $x^2 - 2x - 7 = 0$ cujas raízes denotamos por $u$ e $v$.
Sabendo que $u^{2012} + v^{2012} = a$ e $u^{2013} + v^{2013} = b$, o valor de $u^{2014} + v^{2014}$ é igual a:

(A) $7b + 2a$ (B) $2b + 5a$ (C) $5a - 2b$
(D) $3a - 7b$ (E) $2b + 7a$

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

Temos que

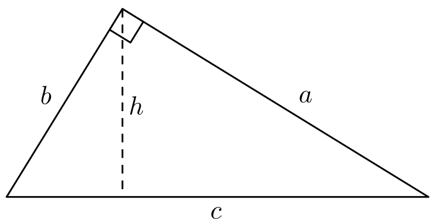
$$\begin{aligned} u^{2014} + v^{2014} &= u^{2012} \cdot u^2 + v^{2012} \cdot v^2 \\ &= u^{2012}(2u + 7) + v^{2012}(2v + 7) \\ &= 2(u^{2013} + v^{2013}) + 7(u^{2012} + v^{2012}) \\ &= 2b + 7a. \end{aligned}$$

21. Em um triângulo retângulo de perímetro 24, a altura relativa à hipotenusa mede $\frac{24}{5}$.
Qual é o comprimento da hipotenusa?

(A) 10 (B) 11 (C) 12
(D) 13 (E) 14

**Resposta: A)**

**Uma solução:**




Indicamos por $a$, $b$ e $c$ os comprimentos dos lados do triângulo, onde $c$ é o comprimento da hipotenusa.

Temos que $a + b + c = 24$ e daí, $24 - c = a + b$, donde $(24 - c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

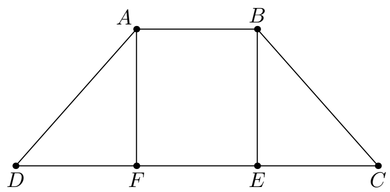
Usando Pitágoras, temos $(24 - c)^2 = c^2 + 2ab$. Usando a relacão métrica $h \cdot c = a \cdot b$, obtemos $(24 - c)^2 = c^2 + 2hc$.

Assim,

$$\begin{gathered} 24^2 - 48c + c^2 = c^2 + 2hc \\ 24^2 - 48c = 2c \cdot \frac{24}{5} \\ 24 - 2c = \frac{2}{5}c \\ 12c = 120 \end{gathered}$$

Portanto, o comprimento da hipotenusa é igual a 10.

22. Sobre o trapézio isósceles $ABCD$, representado na figura abaixo, sabe-se que $\overline{AB} = 10$ e que a área do retângulo $ABEF$ representa 50% da área do trapézio $ABCD$.




Sabendo que o perímetro do trapézio é igual a 70, é correto afirmar que a altura do trapézio é igual a

(A) 30 (B) $5\sqrt{13}$ (C) 15
(D) $5\sqrt{5}$ (E) 10

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

Denominando por $h$ a altura do trapézio e levando em conta que $\overline{DF} = \overline{CE} = x$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = l$, temos $A_R = \frac{1}{2}A_T$, onde $A_R$ é a área do retângulo e $A_T$ é a área do trapézio.

Substituindo pelas fórmulas das respectivas áreas, vem que $10h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(20+2x)\,h}{2}\right)$, e, dividindo por $h$ ambos os membros, tem-se que

$$10 = \frac{1}{2}\frac{(20+2x)}{2} \;\therefore\; x = 10.$$

Utilizando a informação sobre o perímetro, temos que $10+l+30+l = 70$, ou seja, $l = 15$.

Por fim, utiliza-se o triângulo retângulo ADF e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$15^2 = h^2 + 10^2 \;\therefore\; h = 5\sqrt{5}.$$

23. Seja $l_n$ a medida do lado de um polígono regular de $n$ lados, inscrito em um círculo de raio $R$. Qual das afirmações abaixo está correta para todo valor de $n$?

(A) $\operatorname{sen}\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{l_n}{2R}$

(B) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{l_n}{2R}$

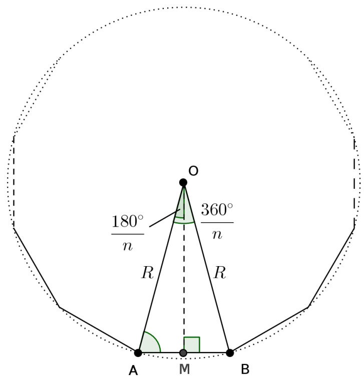
(C) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{l_n}{R}$

(D) $\cos\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = \dfrac{l_n}{R}$

(E) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{360^\circ}{n}\right) = \dfrac{l_n}{R}$

**Resposta: B)**

**Uma solução:**




Na figura, $O$ é o centro do polígono, logo, o ângulo $A\hat{O}B$ é central, de medida $\dfrac{360°}{n}$.

O triângulo $ABO$ é isósceles, pois os lados $AO$ e $BO$ são raios da circunferência. Com isso, a altura $AM$ é também bissetriz, e então $\angle(MOA) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{360°}{n} = \dfrac{180°}{n}$.

No triângulo retângulo $AMO$, o cateto $AM$ mede metade do lado do polígono, isto é $\overline{AM} = \dfrac{l_n}{2}$.

Portanto, sen $\left(\dfrac{180°}{n}\right) = \dfrac{\frac{l_n}{2}}{R} = \dfrac{l_n}{2R}$.

24. Uma distribuidora de água possui dois tanques com capacidade de 60.000 litros cada, um deles completamente vazio e o outro completamente cheio. No mesmo instante, o primeiro começa a ser enchido a uma taxa constante, de forma a estar completamente cheio em seis horas, e o segundo começa a ser esvaziado, também a uma taxa constante, de forma a estar completamente vazio em três horas. Em quanto tempo, após o começo do processo, os tanques possuirão exatamente a mesma quantidade de água?

(A) 1 hora
(B) 1 hora e 30 minutos
(C) 2 horas
(D) 2 horas e 30 minutos
(E) 3 horas

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

O primeiro tanque é enchido em 6 horas, portanto, a uma taxa de 10.000 litros por hora. Como inicia completamente vazio, sua quantidade de água é dada por

$$T_1 = 10.000t,$$

onde $t$ é o tempo, em horas, decorrido.

O segundo tanque é esvaziado em 3 horas, portanto, a uma taxa de 20.000 litros por hora. Como inicia completamente cheio, isto é, com 60.000 litros, sua quantidade de água é dada por

$$T_2 = 60.000 - 20.000t.$$

Os tanques estarão com a mesma quantidade de água se

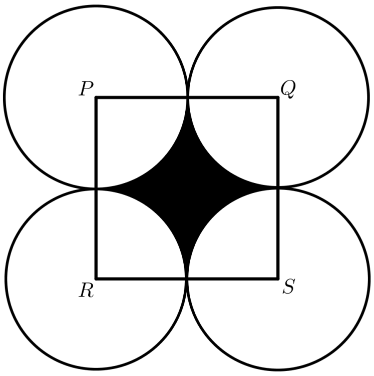
$$T_1 = T_2,$$

isto é,

$$10.000t = 60.000 - 20.000t \therefore 30.000t = 60.000 \therefore t = \frac{60.000}{30.000} \therefore t = 2.$$

Assim, os tanques têm a mesma quantidade de água decorridas 2 horas do começo do processo.

25. Os vértices do quadrado $PQRS$ são os centros de quatro circunferências de raio 2, cada uma tangente a outras duas, conforme a figura abaixo. Qual é a área da região interna ao quadrado e externa às quatro circunferências?




(A) $4 - \pi$
(B) $4 - \frac{\pi}{4}$
(C) $16 - \frac{\pi}{4}$
(D) $16 - \pi$
(E) $16 - 4\pi$

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

Como os vértices do quadrado passam pelos centros das circunferências sendo elas tangentes, conclui-se que o lado do quadrado tem a mesma medida do diâmetro das circunferências, ou seja, igual a 4.

Como a área da região limitada pela circunferência é dada por $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, então a área procurada é a diferença das áreas do quadrado e dos quatro setores das circunferências, ou seja, $16 - 4 \cdot \frac{4\pi}{4} = 16 - 4\pi$.

26. Assinale a alternativa verdadeira:
(A) Se $x < 1$, então $x^2 < 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.
(B) Se $x^2 > 1$, então $x > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.
(C) Se $2 > x + 1$, então $\dfrac{2}{x+1} > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -1$.
(D) Se $x < 1$, então $\dfrac{1}{x} > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.
(E) Se $\dfrac{2}{x+1} > 1$, então $\dfrac{1-x}{x+1} > 0$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -1$.

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

Analisaremos cada uma das afirmações:

a) Falsa. Para $x = -2$ temos, $-2 < 1$ e $4 > 1$.

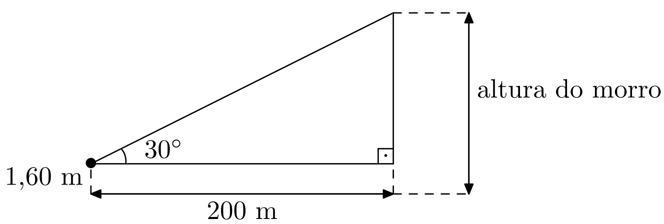
b) Falsa. Para $x = -2$ temos, $(-2)^2 > 1$ e $-2 < 1$.

c) Falsa. Para $x = -2$ temos, $2 > -2 + 1$ e $\dfrac{2}{-2+1} < 1$.

d) Falsa. Para $x = -2$ temos, $-2 < 1$ e $-\dfrac{1}{2} < 1$.

e) Verdadeira. Temos, $\dfrac{2}{x+1} > 1 \iff \dfrac{2}{x+1} - 1 > 0 \iff \dfrac{1-x}{x+1} > 0$.

27. Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: $30°$. O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\tan 30° = 0,57$. Se a altura do teodolito é $1,60$ m, qual é a altura do morro obtida pelo topógrafo?




(A) $352,48$ m (B) $125,60$ m (C) $118,20$ m
(D) $115,60$ m (E) $114$ m

**Resposta: D)**

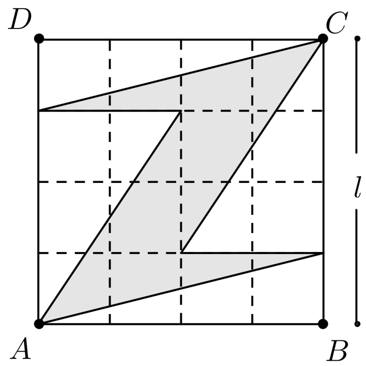
**Uma solução:**

Indicando por $x$ o cateto oposto ao ângulo de $30°$, temos que $\tan 30° = \dfrac{x}{200}$.

Como ele usou $\tan 30° = 0,57$, segue que $\dfrac{x}{200} = 0,57$, e daí $x = 0,57 \cdot 200 = 114$.

Portanto altura do morro é dada por $114 + 1,60 = 115,60$ m.

28. Na figura abaixo, cada lado do quadrado $ABCD$ foi dividido em quatro partes de mesma medida. Determine a área da região destacada em cinza em função da medida do lado do quadrado $ABCD$.

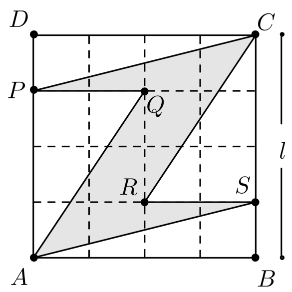



(A) $5l^2/8$
(B) $l^2/4$
(C) $3l^2/8$
(D) $5l^2/4$
(E) $3l^2/4$

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

Observemos a figura:




A área da região destacada em cinza na figura (identificada nesta solução por polígono $PQASRC$) equivale à área do quadrado $ABCD$ subtraídas as áreas dos triângulos $APQ$, $CRS$, $ABS$ e $CDP$.

As áreas dos triângulos $ABS$ e $CDP$ são iguais, assim como as áreas dos triângulos $APQ$ e $CRS$ e assim:

$$A_{ABS} = A_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot l = \frac{l^2}{8} \quad \text{e} \quad A_{APQ} = A_{CRS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3l}{4} = \frac{3l^2}{16}.$$

Desse modo, calculamos a área do polígono $PQASRC$ em destaque:

$$A_{PQASRC} = A_{ABCD} - (A_{ABS} + A_{CDP} + A_{APQ} + A_{CRS})$$

$$A_{PQASRC} = l^2 - \left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{8} + \frac{3l^2}{16} + \frac{3l^2}{16}\right) = l^2 - \frac{5l^2}{8} = \frac{3l^2}{8}.$$

29. Para pintar 48 metros quadrados de parede em sua casa, João gastou uma lata de tinta e pagou por ela 90 reais. Quanto ele ainda terá que dispor, em reais, para comprar a tinta suficiente para terminar a pintura da sua casa, que tem o total de 240 metros quadrados de parede?

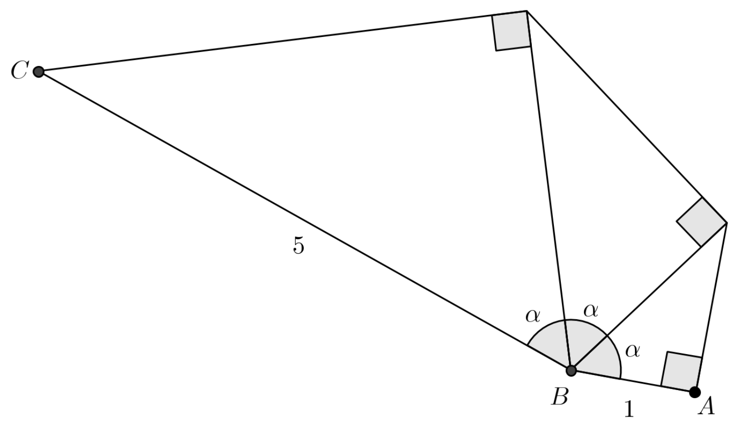
(A) 360 (B) 450 (C) 540
(D) 630 (E) 1200

**Resposta: A)**

**Uma solução:**

João gastou 90 reais para pintar 48 metros quadrados de parede. Para pintar $240 = 48 \times 5$ metros quadrados seriam necessárias 5 latas ao preço total de 450 reais. Logo ainda são necessários $450 - 90 = 360$ reais para terminar o serviço.

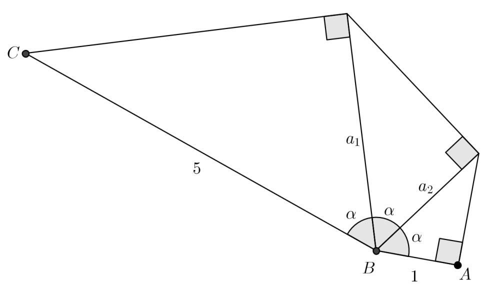
30. Na figura, estão assinalados três ângulos retos, e três ângulos de medida $\alpha$. Sendo $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 5$, o valor de $\cos\alpha$ é




(A) $\sqrt{3}/2$ (B) $1/\sqrt[3]{5}$ (C) $1/\sqrt{5}$
(D) $\sqrt[3]{5}$ (E) $1/5$

**Resposta: B)**

**Uma solução:**



Vamos denotar por $a_1$ e $a_2$ as medidas dos segmentos que formam os lados dos ângulos de medida $\alpha$, como na figura acima.

No triângulo retângulo de hipotenusa 5, a medida do cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ é $a_1$, logo

$$\cos\ \alpha = \frac{a_1}{5} \therefore a_1 = 5\ \cos\ \alpha.$$

No triângulo retângulo de hipotenusa $a_1$, o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ mede $a_2$, logo

$$\cos\ \alpha = \frac{a_2}{a_1} \therefore a_2 = a_1\ \cos\ \alpha = (5\ \cos\ \alpha)\cos\ \alpha = 5\ \cos^2\alpha.$$

Por fim, no triângulo retângulo de hipotenusa $a_2$, o cateto adjacente ao ângulo de medida $\alpha$ mede 1, logo

$$\cos\ \alpha = \frac{1}{a_2} \therefore 1 = a_5\ \cos\ \alpha = (5\ \cos^2\alpha)\cos\ \alpha = 5\ \cos^3\alpha.$$

Com isso,

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{5},$$

que implica

$$\cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

31. Em um certo país, os possíveis números de telefones celulares eram formados por oito algarismos, utilizando-se dígitos de 0 a 9, iniciados, obrigatoriamente, com 9, 8 ou 7. Com o crescimento da população, houve a necessidade de se criar novos números. Os números antigos foram mantidos, apenas recebendo um algarismo 9 em seu início, passando assim a ter 9 algarismos. Já os números novos, formados também com nove algarismos, têm a única restrição de começar com o dígito 9. Desta maneira, quantos números a mais foram criados?

(A) 10 milhões (B) 30 milhões (C) 50 milhões
(D) 70 milhões (E) 80 milhões

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

O total de números de nove algarismos tendo o dígito 9 como primeiro é $10^8$. Os números antigos de oito algarismos constam no total de $3 \cdot 10^7$ e, introduzindo o dígito 9 como primeiro não altera o total desses números, apenas passam a ter nove algarismos. Portanto, a quantidade de números criados é igual a $10^8 - 3 \cdot 10^7 = 10 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7 = 7 \cdot 10^7 = 70$ milhões.

32. Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100.
Baseado na convenção acima, se escolhermos aleatoriamente um ano entre 2014 e 2413 (incluindo esses dois anos), qual a probabilidade do ano ser bissexto?

(A) 1/4
(B) 101/400
(C) 100/399
(D) 97/399
(E) 97/400

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

De 2014 a 2413 temos um total de 400 anos. Neste intervalo temos anos bissextos de 4 em 4 anos, exceto nos anos de 2100, 2200 e 2300. Logo temos 97 anos bissextos. Portanto a probabilidade de um ano ser bissexto, entre 2014 a 2413, é igual a $\frac{97}{400}$.

33. Em uma cidade de 80 mil habitantes surgiu um vírus contagioso chamado $D3$. Ao final da semana da sua descoberta existia apenas uma pessoa infectada por este vírus. Ao final da segunda semana já existiam 3 pessoas infectadas, ao final da terceira semana o número de infectados era de 9 pessoas, ao final da quarta semana subiu para 27. Assumindo que não houve medida de controle e que o número de pessoas infectadas pelo vírus $D3$ ao final de cada semana continua crescendo em progressão geométrica (enquanto não alcance a população total), ao final de que semana desde a descoberta do vírus será ultrapassada a marca em que 10% da população estará infectada?

(A) sexta semana
(B) sétima semana
(C) oitava semana
(D) nona semana
(E) décima semana

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

Basta observar que o número de pessoas infectadas na $n-$ésima semana é dado pela expressão $3^{n-1}$. Calculando as potências de 3, observamos que $3^8 = 6561$ e $3^9 = 19.683$.

Logo, como 19.683 é o primeiro valor superior a 8.000 (10% da população), temos que este fato acontece na décima semana, visto que para $n = 10$ é verificada a expressão que leva a este valor.

34. Em um determinado concurso público um corretor de reda-ções avaliou 10 alunos com notas de 0 a 10. As notas aplicadas por este avaliador estão apresentadas na tabela a seguir:

| Aluno | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nota | 8 | 5,5 | 4 | 6 | 8 | 9 | 7,5 | 7,5 | 8 | 6,5 |

A partir dos dados apresentados na tabela, é correto afirmar, sobre as estatísticas da variável que indica as notas, que

(A) média < moda < mediana
(B) moda < média < mediana
(C) mediana < média < moda
(D) média < mediana < moda
(E) mediana < moda < média

**Resposta: D)**

**Uma solução:**

A moda, valor que possui maior frequência nos dados, é 8. Organizando os dados em ordem crescente e denominando o $i$-ésimo valor observado - já ordenado - por $a_i$, para $i \in \{1, ..., 10\}$, calculamos a mediana de um conjunto de dez observações como sendo $\dfrac{a_5 + a_6}{2} = \dfrac{7,5 + 7,5}{2} = 7,5$. Por fim, a média é dada por

$$\frac{4 + 5,5 + 6 + 6,5 + 7,5 + 7,5 + 8 + 8 + 8 + 9}{10} = 7.$$

35. Jogando-se quatro vezes um dado comum de seis faces, não viciado, qual a probabilidade de obtermos um resultado maior ou igual a 5 apenas na quarta jogada?

(A) 8/81 (B) 16/81 (C) 8/27
(D) 1/3 (E) 4/3

**Resposta: A)**

**Uma solução:**

A cada vez que se joga o dado, a probabilidade do evento $A =$"obter um resultado maior ou igual a 5" é

$$P(A) = \frac{n(\{5, 6\})}{n(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

e a probabilidade de seu complementar é, então, $1 - P(A) = \frac{2}{3}$.

Queremos a probabilidade de ocorrer $A$ apenas na quarta jogada, o que significa que, nas três jogadas anteriores, não ocorrerá $A$, ocorrendo então seu complementar. Assim, como cada arremesso de dados é independente dos demais, temos

$$P(\text{"só obter um resultado maior ou igual a 5 na quarta jogada"}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}.$$

36. Uma academia de musculação funciona em três turnos: matutino, vespertino e noturno. O matutino possui 60 alunos, dos quais 20% estão em atraso com a mensalidade; o vespertino possui 40 alunos, dos quais 10% estão em atraso; o noturno possui 75 alunos, dos quais 80% estão em dia com a mensalidade. As fichas cadastrais de todos os alunos da academia estão sobre a mesa do gerente. Ele pega aleatoriamente uma dessa fichas. Qual a probabilidade de a ficha selecionada pertencer a um aluno do turno noturno, sabendo-se que é uma ficha de aluno em atraso com a academia?

(A) 1/5 (B) 3/35
(C) 12/35 (D) 60/31
(E) 15/31

**Resposta: E)**

**Uma solução:**

Consideremos a tabela abaixo:

| Turno | Em dia | Em atraso |
|---|---|---|
| Matutino | 48 | 12 |
| Vespertino | 36 | 4 |
| Noturno | 60 | 15 |
| TOTAL | 144 | 31 |

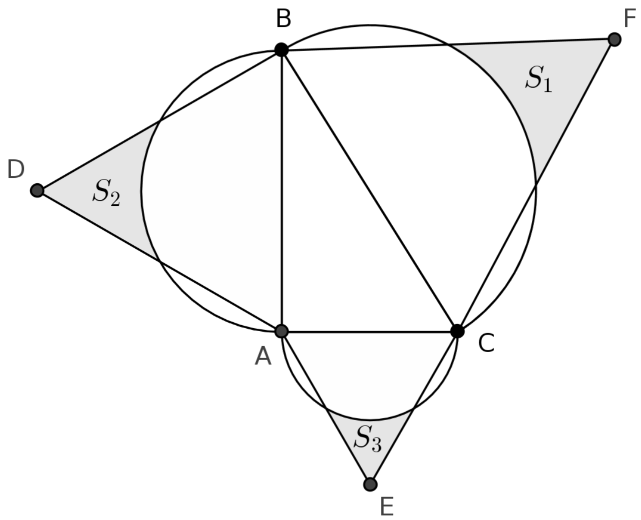
Dos 60 alunos do turno matutino, 20% estão em atraso com as mensalidades, ou seja, $20\% \cdot 60 = \frac{20}{100} \cdot 60 = 12$ alunos.

Dos 40 alunos do turno vespertino, 10% estão em atraso, logo $10\% \cdot 40 = \frac{10}{100} \cdot 40 = 4$ alunos.

No turno noturno, $100\% - 80\% = 20\%$ dos 75 alunos estão com mensalidade atrasada, logo $20\% \cdot 75 = \frac{20}{100} \cdot 75 = 15$ alunos.

Assim, há um total de $12+4+15 = 31$ alunos inadimplentes. Logo, se uma ficha pertence a um aluno com mensalidade atrasada, a chance de ela pertencer a um aluno do turno noturno é $\frac{15}{31}$.

37. Na figura, o triângulo $ABC$ é retângulo em $A$, os triângulos $ABD$, $ACE$ e $BCF$ são equiláteros e os segmentos $AB$, $AC$ e $BC$ são os diâmetros dos arcos de circunferência. Sendo $S_1$, $S_2$ e $S_3$ as áreas das regiões destacadas, a área $S_1$ é dada por




(A) $S_2 + S_3$
(B) $\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$
(C) $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$
(D) $\sqrt{S_2^2 - S_3^2}$
(E) $S_2 - S_3$

**Resposta: A)**

**Uma solução:**

As regiões de áreas $S_1$, $S_2$ e $S_3$ são, entre si, semelhantes, pois são limitadas, respectivamente, pelos triângulos equiláteros de lados de medida $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e círculos cujos diâmetros têm estas mesmas medidas.

Assim, as áreas $S_1$, $S_2$ e $S_3$ são proporcionais aos quadrados das medidas $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, isto é,

$$\frac{S_1}{\overline{BC}^2} = \frac{S_2}{\overline{AB}^2} = \frac{S_1}{\overline{AC}^2}.$$

Igualando estas razões a $k$,

$$\frac{S_1}{\overline{BC}^2} = \frac{S_2}{\overline{AB}^2} = \frac{S_1}{\overline{AC}^2} = k,$$

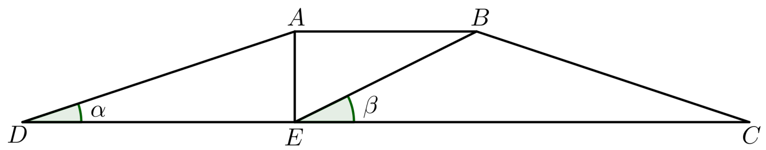
temos

$$S_1 = k \cdot \overline{BC}^2,$$
$$S_2 = k \cdot \overline{AB}^2,$$
$$S_3 = k \cdot \overline{AC}^2.$$

Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras,

$$S_1 = k \cdot \overline{BC}^2 = k\left(\overline{AB}^2 + k \cdot \overline{AC}^2\right) = k \cdot \overline{AB}^2 + k \cdot \overline{AC}^2 = S_2 + S_3.$$

38. Sobre o trapézio isósceles ABCD, desenhado na figura abaixo, sabe-se que a altura do trapézio é a metade da medida da base menor e que a base maior é o quádruplo da base menor.




Definidos os ângulos $\alpha$ e $\beta$ como na figura, assinale a alternativa que apresenta o menor valor real entre os cincos valores:

(A) sen $\alpha$ (B) $\cos\alpha$ (C) sen $\beta$
(D) $\cos\beta$ (E) tg $\alpha$

**Resposta: ANULADA)**

39. De um baralho comum de 52 cartas são retiradas, em sequência e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito de maneira que a primeira carta seja de ouros e a segunda carta não seja uma dama?
Informação: Um baralho de 52 cartas tem 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama) e K (rei). Portanto há 4 reis, 4 damas, 4 valetes, 4 áses, etc.

(A) 611 (B) 612 (C) 624
(D) 625 (E) 637

**Resposta: B)**

**Uma solução:**

Há duas possibilidades:

1) A primeira carta retirada é a dama de ouros. Com isso temos uma opção para a primeira carta e 48 para a segunda. Logo há $1 \cdot 48 = 48$ maneiras para esse caso.

2) A primeira carta é de ouros, mas não é a dama. Assim temos 12 opções para a primeira carta e 47 para a segunda. Então há $12 \cdot 47 = 564$ modos para esse caso.

Portanto a totalidade de maneiras de retirar uma carta de ouros e depois uma carta que não seja uma dama é igual a $48 + 564 = 612$.

40. Em uma turma de quatro alunos, o professor aplicou duas provas $P_1$ e $P_2$, obtendo as seguintes notas:

$$P_1 = \{30, 40, 50, 60\} \quad \text{e} \quad P_2 = \{15, 35, 55, 75\}.$$

Analisando os resultados, é possível afirmar que
(A) $P_1$ e $P_2$ possuem a mesma média aritmética e o mesmo desvio padrão.
(B) $P_1$ e $P_2$ possuem médias aritméticas diferentes e desvios padrões diferentes.
(C) $P_1$ e $P_2$ possuem a mesma média aritmética e desvios padrões diferentes.
(D) $P_1$ possui maior desvio padrão que $P_2$.
(E) $P_2$ possui maior média aritmética que $P_1$.

**Resposta: C)**

**Uma solução:**

A média aritmética da prova $P_1$ é dada por $\bar{x}_1 = \dfrac{30+40+50+60}{4} = \dfrac{180}{4} = 45$ e o desvio padrão é dado por

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(30-45)^2 + (40-45)^2 + (50-45)^2 + (60-45)^2}{4}} = \sqrt{\frac{500}{4}} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

A média aritmética da prova $P_2$ é dada por $\bar{x}_2 = \dfrac{15+35+55+75}{4} = \dfrac{180}{4} = 45$ e o desvio padrão é dado por

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(15-45)^2 + (35-45)^2 + (55-45)^2 + (75-45)^2}{4}} = \sqrt{\frac{2000}{4}} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$